Bachelorarbeit

Galoisabstieg für Varietäten

Florian Wittbold

vorgelegt am

16. Oktober 2018

Betreuung: Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Fakultät für Mathematik

Universität Duisburg-Essen

I. Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe. Ich habe alle Stellen, die ich aus den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommen habe, als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, am 16.10.2018

II. Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich während meines Bachelor-Studiums und der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.
Ein besonderer Dank gilt diesbezüglich Herrn Kohlhaase, der mich die ersten sechs Semester als Lehrender begleitet hat, dem ich mein Interesse an der Algebra verdanke und der bei Fragen stets hilfsbereit war.
Zudem gilt dieser Dank meiner Mutter, meinen Großeltern und meinen Freunden Aleks, Katharina und Marc, mit denen ich den Großteil der algebraischen Grundausbildung genossen habe.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

In dieser Bachelorarbeit wollen wir die Methode des Galoisabstiegs kennenlernen und diese für die Bestimmung und Klassifizierung von Brauer-Severi-Varietäten benutzen. Zudem werden wir einige Aussagen über die Formen affiner Räume über einem Körper K treffen.

Dafür wird zunächst der Begriff einer Form eines K-Schemas X eingeführt und wir werden in zwei Beispielen erkennen, dass die Betrachtung von Formen in der Tat notwendig ist. Dann werden wir die Methode des Galoisabstiegs zunächst im algebraischen Sinne für Algebren und daraufhin im geometrischen Sinn für quasi-projektive Schemata kennenlernen. Schließlich werden wir im Abschluss des ersten Abschnitts grundlegende Begriffe der Kohomologie einführen und diese mithilfe der Methode des Galoisabstiegs zur Klassifizierung von endlich galoisschen Formen von K-Schemata verwenden.

Im zweiten Abschnitt werden wir den Spezialfall der Formen des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_K$ betrachten. Um diese sogenannten Brauer-Severi-Varietäten genauer zu klassifizieren, führen wir den Begriff der Azumaya-Algebren ein, mit deren Hilfe wir die Brauer-Severi-Varietäten in bestimmten Fällen auch genau bestimmen werden. Den Abschluss dieses Abschnitts bildet der Satz von Châtelet, der aussagt, dass jede Brauer-Severi-Varietät mit einem K-rationalen Punkt bereits isomorph zu einem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_K$ ist.

Im letzten Abschnitt betrachten wir kurz den Fall der Formen des affinen Raumes $\mathbb{A}^n_K$. Wir geben einen Beweis für die Abwesenheit von nichttrivialen endlich galoisschen Formen der affinen Geraden $\mathbb{A}^1_K$ sowie ein Beispiel für eine nichttriviale inseparable Form von $\mathbb{A}^1_K$ und verweisen auf das bisher noch ungelöste Problem der Bestimmung der Formen des affinen Raumes $\mathbb{A}^n_K$ im Fall $n \geqslant 3$.

Viele Beweise, insbesondere im ersten Abschnitt, orientieren sich an dem Artikel (Jah00) von Jörg Jahnel, der die grundlegende Vorlage dieser Bachelorarbeit bildet. Der Begriff einer Algebra über einem Körper wird hier stets im Sinne einer assoziativen Algebra mit Eins gebraucht.

1 Galoisabstieg

1.1 Motivation

Wir wollen mit der grundlegenden Definition einer Form beginnen.

Definition 1.1.1. *Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und X ein K-Schema. Ein K-Schema Y heißt eine L-**Form** von X, falls*

$$X \times_K L \cong Y \times_K L$$

als L-Schemata.
*L heißt in diesem Fall ein **Zerfällungskörper** von Y.*

Bemerkung. Schreibe auch kurz $X_L := X \times_K L (= X \times_{Spec(K)} Spec(L))$.
Sind X und Y affin, so ist Y eine L-Form von X genau dann, wenn

$$\mathcal{O}_X(X) \otimes_K L \cong \mathcal{O}_Y(Y) \otimes_K L$$

als L-Algebren. Dies folgt aus der Dualität zwischen affinen L-Schemata und kommutativen L-Algebren und der Darstellung der Faserprodukte affiner Schemata als Spektrum der Tensorprodukte ihrer globalen Schnitte.

Beispiele. Selbstverständlich ist jedes zu X isomorphe K-Schema Y eine L-Form von X für eine beliebige Körpererweiterung $L|K$. Die folgenden Beispiele dienen der Veranschaulichung, dass es im Allgemeinen nicht nur diese trivialen Formen gibt:

i) Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung, wobei $L \neq K$. Dann ist $Y := Spec(K^{[L:K]})$ eine nicht-triviale L-Form von $X := Spec(L)$:
Offensichtlich gilt: L ist als K-Algebra nicht isomorph zu $K^{[L:K]}$, da $n := [L : K] > 1$ und somit $K^{[L:K]}$ kein Körper ist.
Wie angemerkt reicht es nun in diesem Fall zu zeigen, dass $L \otimes_K L \cong K^{[L:K]} \otimes_K L$ als L-Algebren.
Nach dem Satz vom primitiven Element existiert ein $\alpha \in L$, sodass α separabel über K und $L = K[\alpha]$. Sei $f_{\alpha,K} = \Pi_{i=1}^n (t - \alpha_i) \in K[t]$ das Minimalpolynom von α über K. Dann gilt $L \cong K[t]/(f_{\alpha,K})$ als K-Algebren und somit

$$L \otimes_K L \cong (K[t]/(f_{\alpha,K})) \otimes_K L \cong L[t]/(f_{\alpha,K})$$

als L-Algebren. Da $L|K$ galoissch, insbesondere normal, folgt demnach mit dem Chinesischen Restsatz (alle α_i sind verschieden):

$$L \otimes_K L \cong L[t]/(\Pi_{i=1}^n (t - \alpha_i)) \cong L^n = L^{[L:K]} \cong K^{[L:K]} \otimes_K L$$

ii) Das $\mathbb{R}$-Schema $Y := V_+(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = Proj(\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2])$ ist eine nicht-triviale $\mathbb{C}$-Form von $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$:
Die $\mathbb{R}$-Schemata X und Y sind nicht isomorph, da bereits auf $\mathbb{R}$-rationalen Punkten

$$X(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \dot\cup \mathbb{P}^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \neq \varnothing$$

$$Y(\mathbb{R}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}); x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \varnothing$$

und ein Isomorphismus zwischen den $\mathbb{R}$-Schemata X und Y einen Isomorphismus zwischen den $\mathbb{R}$-rationalen Punkten $X(\mathbb{R})$ und $Y(\mathbb{R})$ induzieren würde.
Betrachtet man jedoch die $\mathbb{C}$-Schemata $X_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und $Y_{\mathbb{C}} \cong V_+(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, so gilt:

$$\begin{aligned} Y_{\mathbb{C}} &\cong V_+(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ &\cong V_+(x_0x_1 - x_2^2) = Proj(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_1 - x_2^2)) \\ &\cong Proj(\mathbb{C}[y_0^2, y_0y_1, y_1^2]) = Proj(\mathbb{C}[y_0, y_1]^{(2)}) \\ &\cong Proj(\mathbb{C}[y_0, y_1]) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ &\cong X_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

wobei die zweite Isomorphie durch den Isomorphismus

$$\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2], x_0 \mapsto x_0 + ix_1, x_1 \mapsto x_0 - ix_1, x_2 \mapsto ix_2,$$

von graduierten Ringen induziert wird und $\mathbb{C}[y_0, y_1]^{(2)}$ den zweiten Veronese-Unterring des graduierten Ringes $\mathbb{C}[y_0, y_1]$ bezeichnet.

Es kann also passieren, dass zwei nicht-isomorphe Schemata über einem Körper K nach einer Skalarerweiterung mit einer Körpererweiterung L isomorph werden. Unser Ziel in dieser Arbeit ist es, diese Formen von K-Schemata X zu klassifizieren. Ein wichtiges Werkzeug, um eine solche Klassifizierung zumindest für endliche Galoiserweiterungen $L|K$ zu ermöglichen, ist die Methode des Galoisabstiegs, die in diesem Kapitel vorgestellt wird.
Wir setzen dafür für ein K-Schema X und eine Körpererweiterung $L|K$ die folgende Schreibweise fest:

Definition 1.1.2. *Wir definieren die folgende Menge:*

$$F^X_{L|K} := \{Y \ K\text{-Schema; } Y \text{ ist eine } L\text{-Form von } X\}/_\sim,$$

wobei $Y \sim Y'$ genau dann, wenn $Y \cong Y'$ als K-Schemata.

Bemerkung. Die Menge $F^X_{L|K}$ ist eine punktierte Menge mit dem trivialen Element

$$1 = [X].$$

Sei im Folgenden $L|K$ stets eine endliche Galoiserweiterung mit zugehöriger Galoisgruppe $G := Gal(L|K)$, sofern nicht anders definiert.

1.2 Algebraische Version

Definition 1.2.1. *Sei $f : L \to A$ eine kommutative L-Algebra.*
Eine Gruppenoperation

$$T : G \to Aut(A), \sigma \mapsto T_\sigma$$

auf dem Ring A (d.h. T ist ein Gruppenhomomorphismus und die T_σ sind Ringautomorphismen) heißt ***semilineare G-Operation*** *(oder auch* ***σ-lineare Operation****) auf A, falls für alle $\lambda \in L, a \in A$ und $\sigma \in G$ die Gleichung*

$$T_\sigma(\lambda a) = \sigma(\lambda)T_\sigma(a)$$

gilt, d.h. sodass für alle $\sigma \in G$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T_\sigma"] & A \\ L \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\sigma"] & L \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Bemerkungen.

* Wenn die Bedeutung im Kontext klar ist, schreibe auch ${}^\sigma a$ statt $T_\sigma(a)$ für $a \in A$ und $\sigma \in G$.

* Nach der Definition ist für eine semilineare G-Operation auf A die Abbildung T_σ im Allgemeinen kein Morphismus von L-Algebren, wohl aber ein Morphismus von K-Algebren. Eine σ-lineare Operation auf A lässt sich also auch als Gruppenhomomorphismus $T : G \to Aut_K(A)$ verstehen, für den das Diagramm (1.1) für alle $\sigma \in G$ kommutiert.

Wir wollen nun die genauere Beziehung von L-Algebren mit solchen semilinearen G-Operationen und den K-Algebren untersuchen. Wir nutzen dafür in den kommenden Theoremen die folgende Schreibweise:

i) $\mathcal{ALG}_K$ sei die Kategorie der kommutativen K-Algebren.

ii) $\mathcal{ALG}^\sigma_{L|K}$ sei die Kategorie der kommutativen L-Algebren mit σ-linearer Operation T bezüglich der Körpererweiterung $L|K$, wobei wir $Hom^\sigma_{L|K}$ für die Morphismen in dieser Kategorie schreiben. Beachte, dass die Morphismen der Kategorie mit den σ-linearen Operationen verträglich sind, d.h. ein Morphismus $\varphi \in Hom^\sigma_{L|K}((A, T), (B, T'))$ ist ein Homomorphismus $\varphi : A \to B$ von L-Algebren, sodass
$$\varphi \circ T_\sigma = T'_\sigma \circ \varphi \tag{1.2}$$
für alle $\sigma \in G$.

Proposition 1.2.2. *Die Zuordnungen*

$$A \mapsto A_L := (A \otimes_K L, (G \to Aut_K(A_L), \sigma \mapsto \sigma_A := id_A \otimes \sigma))$$
$$\varphi \mapsto \varphi_L := \varphi \otimes id_L$$

bilden einen wohldefinierten Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{ALG}_K \to \mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K}$.

Beweis.
Die Wohldefiniertheit folgt durch einfaches Nachrechnen. Beachte hierbei, dass die durch $\varphi : A \to B$ definierte Abbildung φ_L im oben genannten Sinne mit den auf A_L und B_L gegebenen semilinearen G-Operationen verträglich ist.

□

Bemerkungen.

* Wenn die Bedeutung im Kontext klar ist, verwende auch einfach die mehrdeutige Bezeichnung σ für σ_A.

* Fassen wir $A \subseteq A_L$ über die durch das Tensorprodukt gegebene kanonische Abbildung $\iota : A \hookrightarrow A_L, a \mapsto a \otimes 1$, als Unterring auf, so gilt offensichtlich $\sigma\big|_A = id_A$ für alle $\sigma \in G$. Beachte, dass ι injektiv ist, da L ein freier K-Modul ist.
  Bezeichnen wir also mit $(A_L)^G := \{x \in A_L; \forall \sigma \in G : {}^{\sigma}x = x\}$ die Fixmenge von A_L unter der σ-linearen Operation, so gilt $A \subseteq (A_L)^G$.
  Tatsächlich gilt für $x = \sum_{i \in I} a_i \otimes l_i \in (A_L)^G$, wobei $(a_i)_{i \in I}$ eine K-Basis von A und $l_i \in L$ für $i \in I$, dass
  $$0 = x - {}^{\sigma}x = \sum_{i \in I} a_i \otimes (l_i - \sigma(l_i))$$
  für alle $\sigma \in G$. Da $(a_i \otimes 1)_{i \in I}$ eine L-Basis von A_L ist, folgt $l_i - \sigma(l_i) = 0$ für alle $\sigma \in G$, also $l_i \in K$, womit $x = (\sum_{i \in I} l_i a_i) \otimes 1 \in A$.
  Insgesamt erhalten wir also die Gleichung $A = (A_L)^G$.

* Ein Morphismus φ in der Kategorie $\mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn er bijektiv ist. Dafür ist nur zu zeigen, dass für eine Bijektion φ die Umkehrabbildung φ^{-1} auch mit den σ-linearen Operationen verträglich ist, d.h. ein Morphismus der Kategorie $\mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K}$ ist. Dies folgt aber sofort aus Gleichung (1.2):
  $$T_\sigma \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ T_\sigma) \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ (T'_\sigma \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ T'_\sigma$$

Das Ziel dieses Abschnitts besteht nun darin zu zeigen, dass durch den in Proposition 1.2.2 definierten Funktor eine Äquivalenz von Kategorien definiert wird. Dies wird in dem folgenden Theorem zusammengefasst:

Theorem 1.2.3. ***(Galoisabstieg - algebraische Version)***
Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe $G := Gal(L|K)$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{ALG}_K &\to \mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K} \\ A &\mapsto A_L \\ \varphi &\mapsto \varphi_L \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Eine analoge Aussage lässt sich auch für die Kategorien der Vektorräume und der nicht notwendigerweise kommutativen Algebren zeigen. Der Beweis verläuft in diesen Fällen vollkommen analog zu dem behandelten Fall, da an keiner Stelle die zusätzlich gegebene Struktur benötigt wird.
Wir führen den Beweis in zwei Schritten und zeigen die Volltreue und essentielle Surjektivität des Funktors:

Satz 1.2.4. *Der Funktor $\mathcal{F}$ ist volltreu, d.h. für alle $A, B \in \mathcal{ALG}_K$ ist*

$$\mathcal{F}_{A,B} : Hom_K(A, B) \to Hom^{\sigma}_{L|K}(A_L, B_L), \varphi \mapsto \varphi_L$$

bijektiv.

Beweis.
Betrachte für $A, B \in \mathcal{ALG}_K$ die Abbildung

$$\mathcal{G}_{A,B} : Hom^{\sigma}_{L|K}(A_L, B_L) \to Hom_K(A, B), \psi \to \psi^G,$$

wobei

$$\psi^G : A \to B, a \to \psi(a).$$

Die Wohldefiniertheit von ψ^G folgt aus der Verträglichkeit von ψ mit den G-Operationen, weshalb $\psi(a \otimes 1) \in (B_L)^G = B$ (vgl. Bemerkung nach Proposition 1.2.2).
Dann gilt für alle $\varphi \in Hom_K(A, B)$

$$\begin{aligned} &(\mathcal{G}_{A,B} \circ \mathcal{F}_{A,B})(\varphi)(a) = (\varphi_L)^G(a) = \varphi(a), \text{ da } (\varphi_L)(a \otimes 1) = \varphi(a) \otimes 1, \text{ für alle } a \in A \\ \Rightarrow &(\mathcal{G}_{A,B} \circ \mathcal{F}_{A,B})(\varphi) = \varphi \end{aligned}$$

sowie für alle $\psi \in Hom^{\sigma}_{L|K}(A_L, B_L)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{A,B} \circ \mathcal{G}_{A,B})(\psi)(a \otimes l) &= (\psi^G)_L(a \otimes l) \\ &= l \cdot (\psi^G(a) \otimes 1) \\ &= l \cdot \psi(a \otimes 1) \\ &= \psi(a \otimes l) \text{ für alle } a \otimes l \in A_L \text{ (und damit auch alle } a_L \in A_L) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}_{A,B} \circ \mathcal{G}_{A,B})(\psi) = \psi.$$

Damit folgt $\mathcal{F}^{-1}_{A,B} = \mathcal{G}_{A,B}$ und somit ist $\mathcal{F}_{A,B}$ bijektiv.

□

Satz 1.2.5. *Der Funktor $\mathcal{F}$ ist essentiell surjektiv, d.h. für $(B, T) \in \mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K}$ existiert ein $A \in \mathcal{ALG}_K$ mit*

$$\mathcal{F}(A) = A_L \cong (B, T).$$

Beweis. *(Dieser Beweis orientiert sich am Beweis des Lemmas 6.4 aus (Bru09))*
Setze

$$A := B^G := \{b \in B; \forall \sigma \in G : T_\sigma(b) = b\} \tag{1.3}$$

die Fixmenge unter der semilinearen G-Operation T, nach deren Definition A mit den von B induzierten Operationen eine K-Algebra ist (wie oben bemerkt sind alle T_σ Morphismen von K-Algebren und A somit abgeschlossen unter den von B induzierten Operationen).
Bemerke, dass im Falle der Kategorie der Vektorräume/Algebren A auch wieder ein Vektorraum/eine Algebra wäre.

Betrachte nun die K-balancierte Abbildung $A \times L \to B, (a, l) \mapsto la$. Diese induziert einen Morphismus von L-Algebren $\varphi : A_L \to B, a \otimes l \mapsto la$.
Zusätzlich gilt für $\sigma \in G$ und $\sum_{i=1}^n (a_i \otimes l_i) \in A_L$:

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \sigma)(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes l_i)) &= \varphi(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes \sigma(l_i))) \\
&= \sum_{i=1}^n \sigma(l_i) a_i \\
&= \sum_{i=1}^n T_\sigma(l_i a_i), \text{ da } a_i \in A \text{ (vgl. (1.3))} \\
&= \sum_{i=1}^n T_\sigma(\varphi(a_i \otimes l_i)) \\
&= (T_\sigma \circ \varphi)(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes l_i))
\end{aligned}$$

Damit ist φ also ein Morphismus in der Kategorie $\mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K}$.

Desweiteren gilt:

- *φ ist surjektiv:*

Sei $(l_1, ..., l_n)$ eine K-Basis von L, $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, wobei $\sigma_1 = id_L$, und $b \in B$ beliebig. Betrachte für $j \in \{1, ..., n\}$

$$a_j := \sum_{i=1}^n T_{\sigma_i}(l_j b) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(l_j) T_{\sigma_i}(b).$$

Da $\sigma \circ G = G$ für alle $\sigma \in G$, gilt $a_j \in A$ für alle $1 \leqslant j \leqslant n$. Zudem ist nach der linearen Unabhängigkeit von Charakteren (vgl. Korollar VI.5.4 aus (Lan02)) die Matrix $M = (\sigma_i(l_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ invertierbar, weshalb:

$$(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} = M \cdot (T_{\sigma_i}(b))_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

$$\Rightarrow b = T_{\sigma_1}(b) = (M^{-1} \cdot (a_j)_j)_1 \in span_L(a_1, ..., a_n) \subseteq im(\varphi)$$

- *φ ist injektiv:*

Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine K-Basis von A, dann ist $(a_i \otimes 1)_{i \in I}$ eine L-Basis von A_L.
Angenommen, φ wäre nicht injektiv, d.h. $ker(\varphi) \neq \{0\}$. Wähle

$$x = \sum_{i \in I} l_i(a_i \otimes 1) \in ker(\varphi) \backslash \{0\}$$

mit $|\{i \in I; l_i \neq 0\}|$ minimal.
Sei o.B.d.A. $l_{i_1} \in K$ (sonst betrachte $(l_{i_1})^{-1}x$). Wäre jedoch $l_i \in K$ für alle $i \in I$, so würde

$$0 = \varphi(x) = \sum_{i \in I} l_i a_i$$

gelten und somit $l_i = 0$ für alle $i \in I$, da $(a_i)_{i \in I}$ K-Basis von A ist. Dann folgt jedoch $x = 0$, im Widerspruch zu $x \in ker(\varphi) \backslash \{0\}$.
Wähle also $i_2 \in I$ mit $l_{i_2} \in L \backslash K$, d.h. $l_{i_2} \neq \sigma(l_{i_2})$ für ein $\sigma \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & 0 = T_\sigma(\varphi(x)) = \varphi(\sigma(x)) \\ \Rightarrow\ & \sigma(x) \in ker(\varphi) \\ \Rightarrow\ & x - \sigma(x) \in ker(\varphi) \backslash \{0\}, \end{aligned}$$

da $l_{i_2} - \sigma(l_{i_2}) \neq 0$ und die $a_i \otimes 1$ L-linear unabhängig.
Zudem gilt jedoch $l_{i_1} - \sigma(l_{i_1}) = 0$, womit

$$|\{i \in I; l_i - \sigma(l_i) \neq 0\}| < |\{i \in I; l_i \neq 0\}|,$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität.

Insgesamt ist φ also ein bijektiver Morphismus in der Kategorie $\mathcal{ALG}^\sigma_{L|K}$ und somit nach der Bemerkung nach Proposition 1.2.2 ein Isomorphismus, womit $\mathcal{F}(A) = A_L \cong B$. $\square$

Bemerkung. Wie aus den Beweisen von Satz 1.4 und 1.5 bereits ersichtlich, lässt sich also ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{ALG}^\sigma_{L|K} \to \mathcal{ALG}_K$ definieren, der eine L-Algebra A mit semilinearer G-Operation auf seine Fixmenge A^G und einen Morphismus $\varphi : A \to B$ auf die Einschränkung $\varphi^G := \varphi\big|_{A^G} : A^G \to B^G$ schickt. Für diesen gilt, dass $\mathcal{FG}$ und $\mathcal{GF}$ jeweils natürlich äquivalent zur Identität von $\mathcal{ALG}^\sigma_{L|K}$ bzw. $\mathcal{ALG}_K$ sind.

1.3 Geometrische Version

Definition 1.3.1. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, K ein Körper.*

i) f heißt ***Immersion*** *(oder auch* ***lokal abgeschlossene Immersion****), falls $f = j \circ i$ für eine abgeschlossene Immersion i und eine offene Immersion j.*

ii) Ein K-Schema X heißt ***quasi-projektiv****, falls ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Immersion $X \to \mathbb{P}^n_K$ in den projektiven n-Raum existiert.*

Bemerkungen.

* Jede abgeschlossene bzw. offene Immersion ist offensichtlich eine Immersion.
* Ein quasi-projektives K-Schema ist also ein abgeschlossenes Unterschema eines offenen Unterschemas eines projektiven Raums über K.
* Jedes quasi-projektive K-Schema X ist quasi-kompakt (da X Unterraum des noetherschen topologischen Raums $\mathbb{P}^n_K$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist).

Lemma 1.3.2. *Die Verknüpfung $g \circ f$ von Immersionen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ist wieder eine Immersion. Insbesondere ist also jedes abgeschlossene oder offene Unterschema eines quasi-projektiven Schemas wieder quasi-projektiv.*

Beweis. (Dieser Beweis orientiert sich am Beweis des Lemmas 25.24.3 von (Sta18))
Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Immersionen, so existieren also offene Unterschemata $i : U \hookrightarrow Y$, $j : V \hookrightarrow Z$, sodass

$$f = i \circ a \text{ und } g = j \circ b$$

für abgeschlossene Immersionen $a : X \to U$, $b : Y \to V$.
Da b ein Homöomorphismus auf sein Bild $b(Y) \subseteq V$ ist (mit der induzierten Topologie), existiert insbesondere ein offenes $V' \subseteq V$, sodass $U = b^{-1}(V')$. Dann ist aber

$$b\big|_{b^{-1}(V')} : b^{-1}(V') = U \to V'$$

wieder eine abgeschlossene Immersion (da $b(U) = b(Y) \cap V' \subseteq V'$ abgeschlossen), weshalb

$$g \circ f = j \circ (b \circ i) \circ a = (j \circ \iota) \circ (b\big|_U \circ a),$$

wobei $\iota : V' \hookrightarrow V$ die kanonische offene Immersion ist.
Da die Verknüpfung von abgeschlossenen (resp. offenen) Immersionen wieder eine abgeschlossene (resp. offene) Immersion ist, folgt somit, dass $g \circ f$ ebenfalls wieder eine Immersion ist.

□

Proposition 1.3.3. *Jedes quasi-projektive K-Schema ist von endlichem Typ und separiert.*

Beweis.
Betrachte für ein quasi-projektives K-Schema X den Strukturmorphismus

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{P}^n_K \xrightarrow{\psi} Spec(K),$$

wobei φ eine abgeschlossene Immersion, ι eine offene Immersion und ψ der Strukturmorphismus von $\mathbb{P}^n_K$ sind.
Da der projektive Raum $\mathbb{P}^n_K$ von endlichem Typ und noethersch ist, folgt, dass Y als offenes Unterschema von endlichem Typ ist und damit X als abgeschlossenes Unterschema von Y ebenfalls von endlichem Typ ist.
Zudem ist $\mathbb{P}^n_K$ separiert und jede Immersion ist separiert (vgl. beispielsweise (GS16), Rmk. 3, S.189), weshalb auch X separiert ist.

□

Bemerkung.
Ein integres, quasi-projektives K-Schema ist somit bereits eine Varietät (im Sinne eines integren, separierten K-Schemas von endlichem Typ). Es gibt jedoch auch Varietäten, die nicht quasi-projektiv sind. Eines der ersten Beispiele für eine solche Varietät, die nicht in den projektiven Raum eingebettet werden kann, wurde im Jahre 1956 von Masayoshi Nagata konstruiert (vgl. (Nag56)).

Lemma 1.3.4. *Für ein K-Schema X und eine endliche Körpererweiterung $L|K$ gilt:*

$$X \text{ ist quasi-projektiv} \Leftrightarrow X_L \text{ ist quasi-projektiv}$$

Beweis.
Die Richtung $\Rightarrow$ folgt leicht aus der Tatsache, dass abgeschlossene (bzw. offene) Immersionen (also auch lokal abgeschlossene Immersionen) stabil unter Basiswechsel sind (vgl. (Sta18), Lemma 25.18.2).
Für die Rückrichtung verweisen wir beispielsweise auf (Jah00), 2.12ix oder (GW10), 14.55.

□

Definition 1.3.5. *Sei $f : X \to Spec(L)$ ein L-Schema.*
Eine Gruppenoperation

$$T : G \to Aut(X), \sigma \mapsto T_\sigma$$

*auf dem Schema X (d.h. T ist ein Gruppenhomomorphismus und die T_σ sind Automorphismen von Schemata auf X) heißt eine **kompatible G-Operation** auf X, falls für alle $\sigma \in G$ das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T_\sigma} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Spec(L) & \xrightarrow{Spec(\sigma^{-1})} & Spec(L) \end{array} \tag{1.4}$$

Bemerkungen.

* Wir schreiben auch einfach die Familie $(T_\sigma)_\sigma$ für die Gruppenoperation T.
* Ist $X = Spec(A)$ affin, so definiert eine kompatible G-Operation T auf X eine semilineare G-Operation $\varphi : G \to Aut(A), \sigma \mapsto \varphi_\sigma$ auf der L-Algebra A, wobei $Spec(\varphi_\sigma^{-1}) = T_\sigma$ für alle σ:
  - φ ist eine Gruppenoperation:
$$\begin{aligned} & Spec(\varphi_\tau^{-1} \circ \varphi_\sigma^{-1}) = Spec(\varphi_\sigma^{-1}) \circ Spec(\varphi_\tau^{-1}) = T_\sigma \circ T_\tau = T_{\sigma\tau} = Spec(\varphi_{\sigma\tau}^{-1}) \\ \Rightarrow\ & \varphi_{\sigma\tau}^{-1} = \varphi_\tau^{-1} \circ \varphi_\sigma^{-1} = (\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau)^{-1} \\ \Rightarrow\ & \varphi_{\sigma\tau} = \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau \end{aligned}$$
  - Das Diagramm 1.4 liefert mithilfe der üblichen kontravarianten Kategorienäquivalenz das folgende kommutierende Diagramm:
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ L & \xrightarrow{\sigma} & L \end{array}$$
* Ähnlich wie im algebraischen Fall ist für eine kompatible G-Operation auf X die Abbildung T_σ im Allgemeinen kein Morphismus von L-Schemata, wohl aber ein Morphismus von K-Schemata (wobei ein L-Schema im kanonischen Sinne mithilfe von $Spec(\iota)$ für die Inklusion $\iota : K \hookrightarrow L$ als K-Schema aufgefasst wird). Dies folgt sofort aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T(\sigma)} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Spec(L) & \xrightarrow{Spec(\sigma^{-1})} & Spec(L) \\ {\scriptstyle Spec(\iota)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Spec(\iota)} \\ Spec(K) & \xrightarrow{id_{Spec(K)}} & Spec(K) \end{array}$$

  Die Kommutativität des unteren Rechtecks folgt aus $\sigma\big|_K = id_K$ durch Anwendung des Funktors *Spec*.

Unser Ziel ist es nun, eine zum algebraischen Fall in Theorem 1.2.3 analoge Aussage für quasi-projektive Schemata zu treffen. Wir nutzen dafür in den kommenden Theoremen folgende Schreibweise:

i) $\mathcal{QP}_K$ (bzw. $\mathcal{AQP}_K$) sei die Kategorie der quasi-projektiven (bzw. affinen quasi-projektiven) K-Schemata.

ii) $\mathcal{QP}^\sigma_{L|K}$ (bzw. $\mathcal{AQP}^\sigma_{L|K}$) sei die Kategorie der quasi-projektiven (bzw. affinen quasi-projektiven) L-Schemata mit kompatibler G-Operation T, wobei wir $Hom^\sigma_{L|K}$ für die Morphismen in dieser Kategorie schreiben. Beachte, dass die Morphismen der Kategorie mit den kompatiblen G-Operationen verträglich sind, d.h. ein Morphismus $\varphi \in Hom^\sigma_{L|K}((X,T),(Y,T'))$ ist ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ von L-Schemata, sodass
$$\varphi \circ T_\sigma = T'_\sigma \circ \varphi$$
für alle $\sigma \in G$.

Proposition 1.3.6. *Die Zuordnungen*
$$X \mapsto X_L := (X \times_K L, (G \to Aut_K(X_L), \sigma \mapsto f_\sigma := id_X \times Spec(\sigma^{-1}))$$
$$\varphi \mapsto \varphi_L := \varphi \times id_{Spec(L)}$$
bilden einen wohldefinierten kovarianten Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{QP}_K \to \mathcal{QP}^\sigma_{L|K}$, der sich zu einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{AQP}_K \to \mathcal{AQP}^\sigma_{L|K}$ einschränkt.

Beweis.
Nach der Definition ist $(f_\sigma)_\sigma$ eine kompatible G-Operation auf $X \times_K L$. Zudem gilt für die Morphismen φ_L:
$$(\varphi \times id_{Spec(L)}) \circ (id_X \times Spec(\sigma^{-1})) = \varphi \times Spec(\sigma^{-1}) = (id_Y \times Spec(\sigma^{-1})) \circ (\varphi \times id_{Spec(L)})$$
womit die Verträglichkeit mit den kompatiblen G-Operationen gewährleistet ist. Desweiteren ist X_L für ein quasi-projektives K-Schema X nach Lemma 1.3.4 wieder quasi-projektiv und für ein affines Schema $X = Spec(A)$ ist auch $X_L \cong Spec(A_L)$ affin. □

Wie schon im algebraischen Fall ist im Folgenden das Ziel zu zeigen, dass durch $\mathcal{F}$ eine Äquivalenz von Kategorien definiert wird:

Theorem 1.3.7. ***(Galoisabstieg - geometrische Version)***
Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe $G := Gal(L|K)$ ist
$$\mathcal{F} : \mathcal{QP}_K \to \mathcal{QP}^\sigma_{L|K}$$
$$X \mapsto X_L$$
$$\varphi \mapsto \varphi_L$$
eine Äquivalenz von Kategorien, die sich zu einer Kategorienäquivalenz $\mathcal{F} : \mathcal{AQP}_K \to \mathcal{AQP}^\sigma_{L|K}$ einschränkt.

Wir zeigen die Aussage zunächst im affinen Fall:

Satz 1.3.8. *Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe $G := Gal(L|K)$ ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{AQP}_K &\to \mathcal{AQP}^{\sigma}_{L|K} \\ X &\mapsto X_L \\ \varphi &\mapsto \varphi_L \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis.
Im Wesentlichen folgt diese Aussage aus Theorem 1.2.3 und der Dualität zwischen der Kategorie der kommutativen Ringe und der Kategorie der affinen Schemata. Wir führen den Beweis aber auch auf Grund der geforderten Quasiprojektivität ausführlich vor.

- *Essentielle Surjektivität:*

Sei $Y := (Spec(B), T) \in \mathcal{AQP}^{\sigma}_{L|K}$. Wie oben bemerkt induziert die kompatible G-Operation T eine semilineare G-Operation φ auf B und damit mittels Galoisabstieg für Algebren (vgl. Satz 1.2.5) eine K-Algebra A mit $A_L \cong B$ in $\mathcal{ALG}^{\sigma}_{L|K}$, d.h. für alle $\sigma \in G$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A_L \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "id_A \otimes \sigma"'] & B \arrow[d, "\varphi_\sigma"] \\ A_L \arrow[r, "\cong"] & B \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Somit folgt für $X := Spec(A)$ die Isomorphie $X_L \cong Spec(A_L) \cong Spec(B) = Y$ in $\mathcal{AQP}^{\sigma}_{L|K}$, da das Diagramm (1.5) das folgende kommutative Diagramm induziert:

$$\begin{tikzcd} X_L = Spec(A_L) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_\sigma = Spec(id_A \otimes \sigma^{-1})"'] & Spec(B) = Y \arrow[d, "Spec(\varphi_\sigma^{-1}) = T_\sigma"] \\ X_L = Spec(A_L) \arrow[r, "\cong"] & Spec(B) = Y, \end{tikzcd}$$

wobei die kompatible G-Operation auf X_L wie in Prop. 1.3.6 durch

$$f_\sigma = id_X \times Spec(\sigma^{-1}) = Spec(id_A \otimes \sigma^{-1})$$

gegeben ist.
Somit ist X nach Lemma 1.3.4 quasi-projektiv und erfüllt damit die gewünschten Eigenschaften.

- *Volltreue:*

Sei also $X = Spec(A), Y = Spec(B)$ sowie $g \in Hom^{\sigma}_{L|K}(X_L, Y_L)$ gegeben. Dann wird g durch einen eindeutigen Homomorphismus von L-Algebren $\varphi_g : B_L \to A_L$ gegeben, für den folgendes Diagramm für alle $\sigma \in G$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd} B_L \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "id_B \otimes \sigma"'] & A_L \arrow[d, "id_A \otimes \sigma"] \\ B_L \arrow[r, "\varphi_g"] & A_L \end{tikzcd}$$

Der durch den Galoisabstieg für Algebren eindeutig gegebene Morphismus $\varphi_g^G : B \to A$ mit $(\varphi_g^G)_L = \varphi_g$ (vgl. Satz 1.2.4) induziert einen Morphismus von K-Schemata $g^G : X \to Y$, für den gilt:

$$(g^G)_L = Spec(\varphi_g^G)_L = Spec((\varphi_g^G)_L) = Spec(\varphi_g) = g$$

Ist umgekehrt $f = Spec(\varphi_f) \in Hom_K(X, Y)$, so gilt

$$(f_L)^G = Spec(\varphi_{f,L})^G = Spec((\varphi_{f,L})^G) = Spec(\varphi_f) = f$$

nach Satz 1.2.4.
Somit ist die Abbildung $(\cdot)^G : Hom^{\sigma}_{L|K}(X_L, Y_L) \to Hom_K(X, Y)$ invers zur Abbildung $(\cdot)_L$ und $\mathcal{F}$ volltreu.

□

Um dieselbe Aussage für beliebige quasi-projektive Schemata auf den affinen Fall reduzieren zu können, benötigen wir noch die folgenden Aussagen:

Lemma 1.3.9. *Sei $P = \{p_1, ..., p_r\} \subseteq \mathbb{P}^n_K$ eine endliche Teilmenge abgeschlossener Punkte und $Z \subseteq \mathbb{P}^n_K$ abgeschlossen mit $Z \cap P = \emptyset$. Dann existiert ein homogenes Element $f \in K[x_0, ..., x_n]$, sodass $Z \subseteq V_+(f) \subseteq \mathbb{P}^n_K \backslash P$.*

Beweis.
Wir beweisen dies durch Induktion nach $r \geqslant 1$:

Der Fall $r = 1$ (also $P = \{p\}$) folgt sofort:
Da Z abgeschlossen ist, gibt es ein homogenes Ideal $I = \sum_{j \in J} f_j L[x_0, ..., x_n] \subseteq L[x_0, ..., x_n]$ (alle $f_j \in L[x_0, ..., x_n]$ homogen), sodass

$$Z = V_+(I) = V_+(\sum_{j \in J} f_j L[x_0, ..., x_n]) = \bigcap_{j \in J} V_+(f_j).$$

Somit folgt aus $p \notin Z$ insbesondere, dass $Z \subseteq V_+(f_j) \subseteq \mathbb{P}^n_L \backslash \{p\}$ für ein $j \in J$ gilt.

Es gelte die Aussage nun also für alle $m < r$.
Wähle dann eine nach der Induktionsvoraussetzung existente Hyperebene $V_+(g) \subseteq \mathbb{P}^n_L$, sodass

$$Z \subseteq V_+(g) \subseteq \mathbb{P}^n_L \backslash \{p_1, ..., p_{r-1}\},$$

wobei $g \in L[x_0, ..., x_n]$ homogen vom Grad d.
O.B.d.A. sei $p_r \in V_+(g)$ (sonst ist $V_+(g)$ die gesuchte Hyperebene). Wähle zudem eine nach Induktionsanfang existente Hyperebene $V_+(h)$, sodass

$$Z \cup \{p_1, ..., p_{r-1}\} \subseteq V_+(h) \subseteq \mathbb{P}^n_L \backslash \{p_r\}.$$

Hierbei verwenden wir, dass P aus abgeschlossenen Punkten besteht.
Ist e der Grad von h, so gilt für $f := h^d + g^e$ also $Z \subseteq V_+(h) \cap V_+(g) \subseteq V_+(f) \subseteq \mathbb{P}^n_L \backslash P$: Wäre nämlich $p_r \in V_+(f)$, d.h. $f \in p_r$ (aufgefasst als homogenes Primideal), so würde wegen $g \in p_r$ auch $h^d \in p_r$ gelten, d.h. $h \in p_r$ (da p_r ein Primideal ist), d.h. $p_r \in V_+(h)$, im Widerspruch zur Wahl von h.
Analog zeigt man $p_i \notin V_+(f)$ für $1 \leqslant i \leqslant r-1$ unter Verwendung von $h \in p_i$ und $g \notin p_i$.
□

Lemma 1.3.10. *Sei $Y \in \mathcal{QP}^\sigma_{L|K}$. Dann existiert eine affine offene Überdeckung $(Y_1, ..., Y_n)$ von Y, sodass alle Y_i G-invariant sind, d.h. $f_\sigma(Y_i) \subseteq Y_i$ für alle $\sigma \in G$ (und damit sogar $f_\sigma(Y_i) = Y_i$).*

Beweis.
Setze $Z := \overline{Y} \backslash Y$ und $P := \{f_\sigma(y) \in \mathbb{P}^n_L; \sigma \in G\}$, wobei $\overline{Y}$ der Abschluss von Y in $\mathbb{P}^n_L$ und y ein beliebiger abgeschlossener Punkt von Y (und damit auch von $\mathbb{P}^n_L$) ist. Beachte, dass $Z \subseteq \mathbb{P}^n_L$ abgeschlossen ist: Schreiben wir $Y \hookrightarrow U$ als abgeschlossenes Unterschema mit $U \subseteq \mathbb{P}^n_L$ offen, so ist $\overline{Y} \cap U$ der Abschluss von Y in U, d.h. $\overline{Y} \cap U = Y$, weshalb

$$\overline{Y} \backslash Y = \overline{Y} \backslash U = \overline{Y} \cap (\mathbb{P}^n_L \backslash U)$$

in $\mathbb{P}^n_L$ abgeschlossen ist.
Nach Lemma 1.3.9 existiert somit eine Hyperebene $H := V_+(f)$ mit $Z \subseteq H \subseteq \mathbb{P}^n_L \backslash P$. Dann ist $Y \backslash H = \overline{Y} \backslash H \hookrightarrow \mathbb{P}^n_L \backslash H$ abgeschlossen und somit ist, da $\mathbb{P}^n_L \backslash H = D_+(f)$ affin, $Y \backslash H$ als abgeschlossenes Unterschema selbst affin.
Setze nun $U_y := \bigcap_{\sigma \in G} f_\sigma^{-1}(Y \backslash H) \subseteq Y$. Da U der Schnitt endlich vieler affin offener Unterschemata von Y ist, folgt aus der Separiertheit von Y (vgl. Proposition 1.3.3), dass U affin offen in Y ist. Nach Konstruktion ist U also eine affin offene, G-invariante Umgebung von y.
Da der abgeschlossene Punkt $y \in Y$ beliebig gewählt war, existiert also insgesamt eine affin offene Überdeckung durch G-invariante Unterschemata von Y, da die abgeschlossenen Punkte in Y dicht liegen (vgl. (GW10), Proposition 3.35). Da Y als quasi-projektives Schema quasi-kompakt ist (vgl. Bemerkung nach Definition 1.3.1), folgt somit die Aussage.
□

Lemma 1.3.11. *Für ein K-Schema X sei $p : X_L \to X$ die durch das Faserprodukt gegebene Projektion. Dann gilt für $y \in X_L$:*

$$p^{-1}(p(y)) = Gy := \{f_\sigma(y); \sigma \in G\}$$

Beweis.
Wähle eine affin offene Umgebung $U = Spec(A) \subseteq X$ von $p(y)$.
Dann ist $p^{-1}(U) = U_L = Spec(A_L)$ eine affin offene Umgebung von y, die $p^{-1}(p(y))$ enthält.

" $\supseteq$ ":
Schreibe $y = \mathfrak{q} \in Spec(A_L)$, $p(y) = \mathfrak{p} \in Spec(A)$. Dann gilt für $\sigma \in G$:

$$\begin{aligned} p(f_\sigma(y)) &= p(\sigma_A(\mathfrak{q})) \\ &= \sigma_A(\mathfrak{q}) \cap A \\ &= \sigma_A(\mathfrak{q}) \cap \sigma_A(A), \text{ siehe Bemerkung nach Prop. 1.2.2} \\ &= \sigma_A(\mathfrak{q} \cap A), \text{ da } \sigma_A \text{ bijektiv} \\ &= \mathfrak{q} \cap A, \text{ siehe Bemerkung nach Prop. 1.2.2} \\ &= p(y) \end{aligned}$$

Somit gilt $G(y) \subseteq p^{-1}(p(y))$.

" $\subseteq$ ":
Sei also $\mathfrak{q}' \in p^{-1}(p(y))$, d.h. $\mathfrak{q}' \in Spec(A_L)$ mit $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$. Für $\alpha \in \mathfrak{q}'$ gilt dann

$$\begin{aligned} &\prod_{\sigma \in G} \sigma_A(\alpha) \in \mathfrak{q}' \cap (A_L)^G = \mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \\ \Rightarrow\ &\exists \sigma \in G : \sigma_A(\alpha) \in \mathfrak{q}, \text{ da } \mathfrak{q} \text{ prim} \\ \Rightarrow\ &\exists \sigma \in G : \alpha \in \sigma_A(\mathfrak{q}) \\ \Rightarrow\ &\mathfrak{q}' \subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma_A(\mathfrak{q}), \text{ da } \alpha \in \mathfrak{q}' \text{ beliebig} \\ \Rightarrow\ &\exists \sigma \in G : \mathfrak{q}' \subseteq \sigma_A(\mathfrak{q}) \text{ (vgl. (AM69), Prop. 1.11 } i)). \end{aligned}$$

Analog existiert ein $\tau \in G$, sodass $\mathfrak{q} \subseteq \tau_A(\mathfrak{q}')$, womit $\tau_A^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{q}' \subseteq \sigma_A(\mathfrak{q})$. Setze $\rho := \tau\sigma \in G$. Da G endliche Ordnung hat, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\rho^n = 1$. Induktiv erhalten wir

$$\mathfrak{q} \subseteq \tau_A(\mathfrak{q}') \subseteq \tau_A(\sigma_A(\mathfrak{q})) = \rho_A(\mathfrak{q}) \subseteq \rho_A^2(\mathfrak{q}) \subseteq ... \subseteq \rho_A^n(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q},$$

d.h. $\mathfrak{q} = \rho_A(\mathfrak{q}) = (\tau_A \circ \sigma_A)(\mathfrak{q})$, also $\tau_A^{-1}(\mathfrak{q}) = \sigma_A(\mathfrak{q})$ und damit schließlich

$$\mathfrak{q}' = \sigma_A(\mathfrak{q}) = f_\sigma(y) \in Gy.$$

□

Korollar 1.3.12. *Sei X ein quasi-projektives K-Schema, $p : X_L \to X$ die kanonische Projektion und $V \subseteq X_L$ offen und G-invariant. Dann ist $p(V) \subseteq X$ offen und es gilt:*

$$V = p(V)_L \subseteq X_L$$

Beweis.
Ist $(Spec(A_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ eine affine, offene Überdeckung von X, so ist $(Spec(A_{i,L}))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ nach der Konstruktion des Faserprodukts eine affine, offene Überdeckung von X_L, sodass $p^{-1}(Spec(A_i)) = Spec(A_i)_L = Spec(A_{i,L})$ und $p\big|_{Spec(A_{i,L})} = Spec(\varphi_i)$ für die kanonische Einbettung $\varphi_i : A_i \hookrightarrow A_{i,L}$ von K-Algebren.
Da $L|K$ endlich, ist $A_{i,L}|A_i$ eine endliche Ringerweiterung, womit p endlich und surjektiv ist (NB: alle φ_i sind injektiv).
Es gilt $X_L = V \dot\cup (X_L \backslash V)$, womit aus der Surjektivität folgt:

$$X = p(X_L) = p(V) \cup p(X_L \backslash V)$$

Da V G-invariant ist, folgt zudem aus Lemma 1.3.11:

$$\begin{aligned} & p^{-1}(p(V)) = GV = V \\ \Rightarrow \;& p(V) \cap p(X_L \backslash V) = \varnothing \end{aligned}$$

Da p endlich und somit insbesondere universell abgeschlossen, ist mit $X_L \backslash V$ auch $p(X_L \backslash V)$ abgeschlossen und $p(V) = X \backslash p(X_L \backslash V)$ also offen. Damit gilt jedoch

$$p(V)_L = p^{-1}(p(V)) = GV = V.$$

□

Bemerkung. In Korollar 1.3.12 zeigen wir, dass $p(V)$ für jede offene, G-invariante Teilmenge $V \subseteq X_L$ wieder offen ist. Tatsächlich gilt dies sogar für alle offenen Teilmengen $V \subseteq X_L$, d.h. p ist offen (dies folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 1.3.11, da $p(V) = p(GV)$ für alle $V \subseteq X_L$).
Allgemeiner gilt, dass jeder flache Morphismus lokal von endlicher Präsentation bereits offen ist (vgl. (Gro65), Théorème 2.4.6). Wir gaben oben einen elementaren und direkten Beweis in unserer speziellen Situation.

Satz 1.3.13. *Der Funktor $\mathcal{F}$ ist essentiell surjektiv, d.h. für $Y \in \mathcal{QP}^{\sigma}_{L|K}$ existiert ein $X \in \mathcal{QP}_K$ mit*

$$\mathcal{F}(X) = X_L \cong Y$$

in $\mathcal{QP}^{\sigma}_{L|K}$.

Beweis.
Nach Lemma 1.3.10 gibt es eine affine offene Überdeckung $(Y_1, ..., Y_n)$ von Y durch G-invariante Schemata Y_i. Setze $Y_{ij} := Y_i \cap Y_j$. Dann ist auch Y_{ij} G-invariant und affin offen (Y ist quasi-projektiv, also nach Proposition 1.3.3 separiert). Nach Satz 1.3.8 existieren also affine K-Schemata X_i und X_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, und Isomorphismen $f_i : X_{i,L} \xrightarrow{\cong} Y_i$ und $f_{ij} : X_{ij,L} \xrightarrow{\cong} Y_{ij}$ von L-Schemata mit kompatibler G-Operation.
Dann induziert die offene Immersion $X_{ij,L} \cong Y_i \cap Y_j \hookrightarrow Y_i \cong X_{i,L}$ via Galoisabstieg für affine Schemata und Korollar 1.3.12 eine offene Immersion $X_{ij} \hookrightarrow X_i$, über die wir X_{ij} als ein offenes Unterschema von X_i auffassen können und $X_{ij,L}$ als offenes Unterschema von $X_{i,L}$ mit $f_i\big|_{X_{ij,L}} = f_{ij}$.
Setze nun $\Psi_{ij} := f_{ji}^{-1} \circ f_{ij} : X_{ij,L} \xrightarrow{\cong} X_{ji,L}$. Dann ist $\Psi_{ij} \in Iso^{\sigma}_{L|K}(X_{ij,L}, X_{ji,L})$ und induziert somit via Galoisabstieg für affine Schemata 1.3.8 einen eindeutigen Isomorphismus $\psi_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$, sodass $\psi_{ij,L} = \Psi_{ij}$. Da $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}^{-1}$, folgt aus Satz 1.3.8 auch $\psi_{ij} = \psi_{ji}^{-1}$.
Für i, j, k ist dann

$$\Psi_{ij}^{(k)} := \Psi_{ij}\big|_{X_{ij,L} \cap X_{ik,L}} = (\psi_{ij}\big|_{X_{ij} \cap X_{ik}})_L =: \psi_{ij,L}^{(k)}$$

nach Konstruktion ein Isomorphismus auf $X_{ji,L} \cap X_{jk,L} \cong Y_i \cap Y_j \cap Y_k$, womit nach Galoisabstieg auch

$$\psi_{ij}^{(k)} : X_{ij} \cap X_{ik} \to X_{ji} \cap X_{jk}$$

ein Isomorphismus ist. Zudem gilt

$$(\psi_{jk}^{(i)} \circ \psi_{ij}^{(k)})_L = \psi_{jk,L}^{(i)} \circ \psi_{ij,L}^{(k)} = \Psi_{jk}^{(i)} \circ \Psi_{ij}^{(k)} = \Psi_{ik}^{(j)} = \psi_{ik,L}^{(j)},$$

womit mittels Galoisabstieg auch die Kozykelrelation erfüllt ist und die X_i somit zu einem Schema X verkleben.
Sind die $\varphi_i : X_i \xrightarrow{\sim} \varphi_i(X_i) \subseteq X$ die kanonischen offenen Immersionen, so betrachte $\Phi_i : Y_i \xrightarrow{f_i^{-1}} X_{i,L} \xrightarrow{\varphi_{i,L}} X_L$. Aus der Eigenschaft der φ_i folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi_i\big|_{Y_i \cap Y_j} &= \varphi_{i,L}\big|_{X_{ij,L}} \circ f_{ij}^{-1} \\
&= (\varphi_i\big|_{X_{ij}})_L \circ f_{ij}^{-1} \\
&= (\varphi_j\big|_{X_{ji}} \circ \psi_{ij})_L \circ f_{ij}^{-1} \\
&= \varphi_{j,L}\big|_{X_{ji,L}} \circ \Psi_{ij} \circ f_{ij}^{-1} \\
&= \varphi_{j,L}\big|_{X_{ji,L}} \circ f_{ji}^{-1} \\
&= \Phi_j\big|_{Y_i \cap Y_j}
\end{aligned}$$

Damit verkleben die Φ_i zu einem Morphismus von L-Schemata $\Phi : Y \to X_L$. Die G-Kompabilität von Φ folgt aus der aller $\Phi_i = \varphi_{i,L} \circ f_i^{-1}$.
Tatsächlich ist Φ ein Isomorphismus: Wegen $X_L = \bigcup_i X_{i,L}$ und da $\Phi\big|_{Y_i} = \Phi_i : Y_i \to X_{i,L}$ für alle $i \in I$ ein Isomorphismus ist, ist dafür nur noch die Injektivität von Φ nachzuweisen. Sind $y, y' \in Y$ mit $\Phi(y) = \Phi(y')$, so wähle $i, j \in I$ mit $y \in Y_i$ und $y' \in Y_j$. Dann gilt

$$\Phi(y) = \Phi(y') \in \varphi_{i,L}(X_{i,L}) \cap \varphi_{j,L}(X_{j,L}) = \varphi_{i,L}(X_{ij,L}) = \varphi_{j,L}(X_{ji,L})$$

und daher $y \in f_i(X_{ij,L}) = Y_i \cap Y_j$ und $y' \in f_j(X_{ji,L}) = Y_i \cap Y_j$. Da $\Phi\big|_{Y_i \cap Y_j} = \Phi_i\big|_{Y_i \cap Y_j}$ injektiv ist, folgt $y = y'$.
Insbesondere ist X nach Lemma 1.3.4 quasi-projektiv und es gilt $\mathcal{F}(X) = X_L \cong Y$.

□

Satz 1.3.14. *Der Funktor $\mathcal{F}$ ist volltreu, d.h. für alle $X, Y \in \mathcal{QPS}_K$ ist*

$$\mathcal{F}_{X,Y} : Hom_K(X, Y) \to Hom^{\sigma}_{L|K}(X_L, Y_L), f \mapsto f_L$$

bijektiv.

Beweis.
Sei $g \in Hom^{\sigma}_{L|K}(X_L, Y_L)$ gegeben und sei $p : X_L \to X$ die kanonische Projektion.
Für eine affine, offene Überdeckung $(Y_1, ..., Y_n)$ von Y, ist dann $(Y_{1,L}, ..., Y_{n,L})$ eine affine, offene Überdeckung von Y_L, wobei alle $Y_{i,L}$ offensichtlich G-invariant sind. Da g mit den kompatiblen G-Operationen verträglich ist, folgt somit, dass $(g^{-1}(Y_{i,L}))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ eine G-invariante, offene Überdeckung von X_L bildet.
Setze nun $X_i := p(g^{-1}(Y_{i,L}))$, dann ist $g^{-1}(Y_{i,L}) = X_{i,L}$ nach 1.3.12 und $X = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$, da p surjektiv ist (vgl. Beweis von Korollar 1.3.12).
Wähle für $1 \leqslant i \leqslant n$ eine affine, offene Überdeckung $(X_{ij})_{j \in J_i}$ von X_i, sodass $(X_{ij,L})_{i \in I, j \in J_i}$ eine G-invariante, affine offene Überdeckung von X_L ist.
Dann wird $g_{ij} := g\big|_{X_{ij,L}} \in Hom^{\sigma}_{L|K}(X_{ij,L}, Y_{i,L})$ via Galoisabstieg für affine Schemata 1.3.8 durch einen Morphismus $f_{ij} \in Hom(X_{ij}, Y_i)$ induziert (d.h. $f_{ij,L} = g_{ij}$). Für i, j, k, l gilt zudem:

$$(f_{ij}\big|_{X_{ij} \cap X_{kl}})_L = f_{ij,L}\big|_{X_{ij,L} \cap X_{kl,L}} = g\big|_{X_{ij,L} \cap X_{kl,L}} = f_{kl,L}\big|_{X_{ij,L} \cap X_{kl,L}} = (f_{kl}\big|_{X_{ij} \cap X_{kl}})_L$$

Da $X_{ij,L} \cap X_{kl,L}$ affin offen (X_L ist separiert), folgt wiederum über Galoisabstieg für affine Schemata $f_{ij}\big|_{X_{ij} \cap X_{kl}} = f_{kl}\big|_{X_{ij} \cap X_{kl}}$.
Somit verkleben die f_{ij} zu einem Morphismus $f : X \to Y$, für den $f_L = g$ auf
$X_L = \bigcup_{i,j} X_{ij,L}$.
Ist $h : X \to Y$ ein weiterer Morphismus mit $h_L = g = f_L$, so gilt für $1 \leqslant i \leqslant n, j \in J_i$:

$$(f\big|_{X_{ij}})_L = f_L\big|_{X_{ij,L}} = h_L\big|_{X_{ij,L}} = (h\big|_{X_{ij}})_L,$$

Mit Galoisabstieg für affine Schemata 1.3.8 folgt $f\big|_{X_{ij}} = h\big|_{X_{ij}}$, womit insgesamt $f = h$.

□

1.4 Klassifizierung durch Kohomologie

Nachdem wir nun mit dem Konzept des Galoisabstiegs das für uns wichtigste Werkzeug im Umgang mit Formen kennengelernt haben, wollen wir in diesem Kapitel eine erste Möglichkeit der Klassifizierung von Formen vorstellen. Dafür wird das Konzept der Kohomologie benötigt, die wir nun in den nächsten zwei Seiten nur kurz in dem Maße einführen, wie wir es in dieser Arbeit benötigen, bevor wir das Kapitel mit dem ersten Klassifizierungstheorem abschließen.

Definition 1.4.1. *Eine Gruppe A zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $T : G \to Aut(A), \sigma \mapsto T_\sigma$ heißt eine G-**Gruppe**.*

Proposition 1.4.2. *Für ein K-Schema X ist die Gruppe*

$$Aut_L(X_L) := \{g : X_L \to X_L; g \text{ Isomorphismus von } L\text{-Schemata}\}$$

eine G-Gruppe bezüglich der G-Operation

$$\sigma \mapsto \sigma := (g \mapsto f_\sigma \circ g \circ f_\sigma^{-1}) : G \to Aut_L(X_L),$$

wobei nach wie vor $f_\sigma := id_X \times Spec(\sigma^{-1})$.

Beweis.

* Für $\sigma \in G$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X_L \arrow[r, "f_\sigma^{-1}"] \arrow[d] & X_L \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X_L \arrow[r, "f_\sigma"] \arrow[d] & X_L \arrow[d] \\ Spec(L) \arrow[r, "Spec(\sigma)"] & Spec(L) \arrow[r, "id_{Spec(L)}"] & Spec(L) \arrow[r, "Spec(\sigma^{-1})"] & Spec(L) \end{tikzcd}$$

  womit die Abbildung $\sigma(g) = f_\sigma \circ g \circ f_\sigma^{-1}$ ein Automorphismus von L-Schemata ist.

* Für alle $\sigma \in G$ ist die Abbildung $g \mapsto \sigma(g)$ ein Automorphismus von $Aut_L(X_L)$, denn aus $f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = id_{X_L}$ folgt $\sigma \circ \sigma^{-1} = id_{Aut_L(X_L)}$ und für $g, h \in Aut_L(X_L)$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(h \circ g) &= f_\sigma \circ h \circ g \circ f_\sigma^{-1} \\ &= f_\sigma \circ h \circ f_\sigma^{-1} \circ f_\sigma \circ g \circ f_\sigma^{-1} \\ &= \sigma(h) \circ \sigma(g) \end{aligned}$$

* Die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma = (g \mapsto f_\sigma \circ g \circ f_\sigma^{-1})$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für $\sigma, \tau \in G$ und $g \in Aut_L(X_L)$ gilt:

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)(g) &= f_{\sigma\tau} \circ g \circ f_{\sigma\tau}^{-1} \\ &= f_\sigma \circ f_\tau \circ g \circ f_\tau^{-1} \circ f_\sigma^{-1} \\ &= f_\sigma \circ \tau(g) \circ f_\sigma^{-1} \\ &= (\sigma \circ \tau)(g) \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Mit einem analogen Beweis folgt auch, dass für eine K-Algebra A die Gruppe $Aut_L(A_L)$ eine G-Gruppe ist, wobei die G-Operation auf $Aut_L(A_L)$ gegeben ist durch die Vorschrift

$$\sigma(f) = \sigma_A \circ f \circ \sigma_A^{-1}.$$

Für affine Schemata $Spec(A)$ induziert die obige G-Operation auf $Aut_L(Spec(A_L))$ ebendiese G-Operation auf $Aut_L(A_L)$ über die übliche Kategorienäquivalenz.

Definition 1.4.3. *Sei (A,T) eine G-Gruppe.*

i) Ein Kozyklus von G nach A ist eine Abbildung $a : G \to A, \sigma \mapsto a_\sigma$, sodass für alle $\sigma, \tau \in G$:

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma T_\sigma(a_\tau)$$

*ii) Zwei Kozyklen $a, b : G \to A$ heißen **kohomolog**, falls ein $f \in A$ existiert, sodass für alle $\sigma \in G$:*

$$b_\sigma = f^{-1} a_\sigma T_\sigma(f)$$

Bemerkungen.

* Schreibe auch $(a_\sigma)_\sigma$ für einen Kozyklus a.

* Ist X ein K-Schema und $a : G \to Aut_L(X_L)$ ein Kozyklus auf der G-Gruppe $Aut_L(X_L)$ (vgl. Prop. 1.4.2), so ist $T : G \to Aut_K(X_L), \sigma \mapsto a_\sigma \circ f_\sigma$ eine kompatible G-Operation auf X_L. Dies folgt sofort aus der Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} X_L & \xrightarrow{\sigma} & X_L & \xrightarrow{a_\sigma} & X_L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Spec(L) & \xrightarrow{Spec(\sigma^{-1})} & Spec(L) & \xrightarrow{id_{Spec(L)}} & Spec(L) \end{array} \tag{1.6}$$

  und der Gleichung

$$a_{\sigma\tau} f_{\sigma\tau} = a_\sigma \sigma(a_\tau) f_\sigma f_\tau = a_\sigma f_\sigma a_\tau f_\sigma^{-1} f_\sigma f_\tau = (a_\sigma f_\sigma) \circ (a_\tau f_\tau).$$

  Analog gilt für eine K-Algebra A und einen Kozyklus a auf der G-Gruppe $Aut_L(A_L)$, dass $\sigma \mapsto a_\sigma \circ \sigma_A$ eine semilineare G-Operation auf A_L definiert.

* Die durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow a, b \text{ kohomolog}$$

  definierte Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{a : G \to A; a \text{ Kozyklus}\}$, denn für Kozyklen $a, b, c : G \to A$ gilt:

  - $a_\sigma = 1^{-1} a_\sigma T_\sigma(1)$ für alle $\sigma \in G$, d.h. $\sim$ ist reflexiv.
  - aus $b_\sigma = f^{-1} a_\sigma T_\sigma(f)$ folgt $a_\sigma = (f^{-1})^{-1} b_\sigma T_\sigma(f^{-1})$ für alle $\sigma \in G$, d.h. $\sim$ ist symmetrisch.
  - aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $c_\sigma = g^{-1}(f^{-1} a_\sigma T_\sigma(f)) T_\sigma(g) = (fg)^{-1} a_\sigma T_\sigma(fg)$ für geeignete $f, g \in A$ und alle $\sigma \in G$, d.h. $\sim$ ist transitiv.

Definition 1.4.4. *Sei (A, T) eine G-Gruppe und $\sim$ die obige Äquivalenzrelation. Dann heißt*

$$H^1(G, A) := \{a : G \to A; a \text{ Kozyklus}\}/_\sim$$

die ***erste (nicht abelsche) Galoiskohomologie*** *von A.*

Bemerkung. Die erste Galoiskohomologie ist eine punktierte Menge mit trivialem Element $1 = (\sigma \mapsto 1) : G \to A$.

Theorem 1.4.5. ***(Klassifizierung über Galoiskohomologie)***
Für ein quasi-projektives K-Schema X gibt es eine Bijektion punktierter Mengen

$$F^X_{L|K} \cong H^1(G, Aut_L(X_L)).$$

Beweis. *(Dieser Beweis orientiert sich in Teilen am Beweis des Satzes 14.88 aus (GW10))*
Sei $h : X \to Spec(K)$ ein quasi-projektives K-Schema und Y eine L-Form von X. Wir wollen nun einen durch Y bestimmten Kozyklus konstruieren. Wähle dafür einen Isomorphismus $\alpha : Y_L \to X_L$ von L-Schemata.
Bezeichne die kanonische kompatible G-Operation auf Y_L mit $(g_\sigma)_\sigma$ und setze

$$f^Y = (f^Y_\sigma)_\sigma := (\alpha \circ g_\sigma \circ \alpha^{-1})_\sigma.$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_L \arrow[rrr, "f^Y_\sigma"] \arrow[d] & & & X_L \arrow[d] \\
& Y_L \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[r, "g_\sigma"] \arrow[dl] & Y_L \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr] & \\
Spec(L) \arrow[rrr, "Spec(\sigma^{-1})"'] & & & Spec(L)
\end{tikzcd}$$

(NB: α ist ein Morphismus von L-Schemata und g ist eine kompatible G-Operation auf Y_L), womit f^Y eine kompatible G-Operation auf X_L ist.
Setze nun $a_\sigma := f^Y_\sigma \circ f^{-1}_\sigma \in Aut_K(X_L)$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X_L \arrow[rrr] \arrow[ddd, "a_\sigma"'] & & & Spec(L) \arrow[ddd, "id_{Spec(L)}"] \\
& & & \\
& X_L \arrow[uul, "f_\sigma"] \arrow[r] \arrow[ddl, "f^Y_\sigma"'] & Spec(L) \arrow[uur, "Spec(\sigma^{-1})"] \arrow[ddr, "Spec(\sigma^{-1})"'] & \\
X_L \arrow[rrr] & & & Spec(L)
\end{tikzcd}$$

Damit gilt $a_\sigma \in Aut_L(X_L)$.

Zudem ist a_σ nach Definition eindeutig durch die Gleichung

$$a_\sigma \circ (f_\sigma \circ \alpha) = \alpha \circ g_\sigma \tag{1.7}$$

bestimmt.
Für $\sigma, \tau \in G$ gilt nun

$$\begin{aligned} \alpha \circ g_{\sigma\tau} &= \alpha \circ g_\sigma \circ g_\tau \\ &= a_\sigma \circ f_\sigma \circ \alpha \circ g_\tau \\ &= a_\sigma \circ f_\sigma \circ a_\tau \circ f_\tau \circ \alpha \\ &= a_\sigma \circ \sigma(a_\tau) \circ f_\sigma \circ f_\tau \circ \alpha \\ &= (a_\sigma \circ \sigma(a_\tau)) \circ (f_{\sigma\tau} \circ \alpha), \end{aligned}$$

womit nach der Gleichung (1.7) $a_{\sigma\tau} = a_\sigma \circ \sigma(a_\tau)$ und $a := (a_\sigma)_\sigma : G \to Aut_L(X_L)$ also ein Kozyklus ist.
Diese Konstruktion ist unabhängig von der Wahl des Isomorphismus α: Wählt man einen weiteren Isomorphismus $\beta : Y_L \to X_L$ und erhält so analog einen Kozyklus b, so gilt

$$\begin{aligned} b_\sigma \circ (f_\sigma \circ \beta) &= \beta \circ g_\sigma \\ &= \beta \circ \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ g_\sigma) \\ &= \beta \circ \alpha^{-1} \circ (a_\sigma \circ f_\sigma \circ \alpha) \\ &= \beta \circ \alpha^{-1} \circ (a_\sigma \circ f_\sigma \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ f_\sigma^{-1} \circ f_\sigma \circ \beta) \\ &= (\alpha\beta^{-1})^{-1} \circ a_\sigma \circ \sigma(\alpha\beta^{-1}) \circ (f_\sigma \circ \beta), \end{aligned}$$

d.h. a, b sind kohomolog, womit $[a] = [b] \in H^1(G, Aut_L(X_L))$.
Ist zudem $\varphi : Z \to Y$ ein Isomorphismus von K-Schemata, so ist auch Z eine L-Form von X. Wählt man den Isomorphismus $\alpha \circ \varphi_L : Z_L \to X_L$ und bezeichnet mit $(h_\sigma)_\sigma$ die kanonische G-Operation auf Z_L, so gilt

$$f_\sigma^Z = \alpha \circ \varphi_L \circ h_\sigma \circ \varphi_L^{-1} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ g_\sigma \circ \alpha^{-1} = f_\sigma^Y$$

und Z induziert dieselbe Kohomologieklasse $[(f_\sigma^Z \circ f_\sigma)_\sigma] = [(f_\sigma^Y \circ f_\sigma)_\sigma] = [(a_\sigma)_\sigma]$ wie Y.
Betrachte die insgesamt wohldefinierte Abbildung

$$F_{L|K}^X \to H^1(G, Aut_L(X_L)), [Y] \mapsto [a].$$

Diese bildet offensichtlich X nach Wahl des Isomorphismus id_{X_L} auf den trivialen Kozyklus $[1]$ ab, womit sie ein Morphismus punktierter Mengen ist. Es bleibt zu zeigen:

Injektivität:
Seien $[Y],[Z] \in F^X_{L|K}$ mit derselben zugehörigen Kohomologieklasse $[a]$. Wähle entsprechende Isomorphismen $\alpha : Y_L \xrightarrow{\sim} X_L$ und $\beta : Z_L \xrightarrow{\sim} X_L$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y_L \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\sigma"] & X_L \arrow[d, "a_\sigma \circ \sigma"] & Z_L \arrow[l, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"] \\ Y_L \arrow[r, "\alpha"'] & X_L & Z_L \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

für alle $\sigma \in G$ kommutiert (wir schreiben hier zur Vereinfachung nur σ für die kompatiblen G-Operationen auf X_L, Y_L und Z_L; die Kommutativität des Diagramms folgt sofort aus der Gleichung (1.7)). Insbesondere ist also $\alpha^{-1} \circ \beta \in Hom^\sigma_{L|K}(Z_L, Y_L)$, womit nach Galoisabstieg $Y \cong Z$ als K-Schemata (vgl. Satz 1.3.14), d.h. $[Y] = [Z] \in F^X_{L|K}$.

Surjektivität:
Sei ein Kozyklus $a : G \to Aut_L(X_L)$ gegeben. Dann ist $(a_\sigma \circ \sigma)_\sigma$ ebenfalls eine kompatible G-Operation auf X_L (vgl. Diagramm (1.6)). Galoisabstieg (vgl. Theorem 1.3.7) liefert somit ein quasi-projektives K-Schema Y, für das ein Isomorphismus $\alpha : Y_L \to X_L$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y_L \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\sigma"] & X_L \arrow[d, "a_\sigma \circ \sigma"] \\ Y_L \arrow[r, "\alpha"'] & X_L \end{tikzcd}$$

kommutiert und somit $[Y]$ unter der gegebenen Abbildung auf $[a]$ abgebildet wird.

$\square$

2 Brauer-Severi-Varietäten

2.1 Motivation

Um die Isomorphieklassen von L-Formen genauer zu untersuchen, können wir also nach Theorem 1.4.5 die erste Galoiskohomologie betrachten, deren explizite Bestimmung über dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_K$ wir uns in diesem Kapitel als Ziel setzen.
Wir betrachten dafür im Folgenden Formen des projektiven Raumes, die sogenannten Brauer-Severi-Varietäten:

Definition 2.1.1. *Ein Schema Y über einem Körper K heißt eine Brauer-Severi-Varietät, falls eine Körpererweiterung $L|K$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass Y eine L-Form des projektiven n-Raums $\mathbb{P}^n_K$ ist.*

Bemerkung. Nach Lemma 1.3.4 ist jede Brauer-Severi-Varietät quasi-projektiv.

Die Bezeichnung "Brauer-Severi-*Varietät*" ist im folgenden Sinne wohldefiniert:

Proposition 2.1.2. *Eine Brauer-Severi-Varietät Y über einem Körper K ist eine Varietät, d.h. ein integres, separiertes K-Schema von endlichem Typ.*

Beweis.
Nach Proposition 1.3.3 ist Y als quasi-projektives Schema separiert und von endlichem Typ.
Zudem ist $Y_L \cong \mathbb{P}^n_L$ als projektiver Raum über einem Körper integer. Betrachte nun die kanonische Projektion $p : Y_L \to Y$.
Angenommen, Y ist nicht reduziert. Dann existiert ein affin offenes Unterschema $U = Spec(A) \subseteq Y$, sodass A nicht reduziert ist. p schränkt sich dann zu einem Morphismus

$$p\big|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) = U_L = Spec(A_L) \to U = Spec(A)$$

von affinen Schemata ein. Sei nun $x \in A\backslash\{0\}$ nilpotent, dann ist auch $p^\sharp_U(x) = x \otimes 1 \in A_L$ nilpotent und ungleich 0, womit A_L und damit U_L nicht reduziert wären. Dann wäre aber auch Y_L nicht reduziert, im Widerspruch zur Annahme.
Angenommen, Y ist nicht irreduzibel, d.h. es existieren zwei abgeschlossene Unterräume $Y_1, Y_2 \subseteq Y$, sodass $Y = Y_1 \cup Y_2$. Dann wäre jedoch auch

$$Y_L = p^{-1}(Y) = p^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = p^{-1}(Y_1) \cup p^{-1}(Y_2)$$

nicht irreduzibel, denn p ist stetig und es gilt $p^{-1}(Y_i) \neq \emptyset$, da p surjektiv (vgl. Beweis von Korollar 1.3.12), im Widerspruch zur Annahme.
Somit ist auch Y integer und damit eine Varietät.

□

2.2 Automorphismen des projektiven Raums

Wie wir in Theorem 1.4.5 gezeigt haben, lassen sich die L-Formen eines K-Schemas X bis auf Isomorphie mithilfe der ersten Galoiskohomologie von $Aut_L(X_L)$ klassifizieren. Um Brauer-Severi-Varietäten bis auf Isomorphie zu klassifizieren, benötigen wir also zunächst Informationen über die Automorphismengruppe $Aut_L(\mathbb{P}^n_L)$ von $\mathbb{P}^n_L$.

Definition 2.2.1. *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppe*

$$PGL_n(K) := GL_n(K)/\{\lambda I_n; \lambda \in K^\times\}$$

heißt die projektive lineare Gruppe auf K^n.

Konstruktion. Für $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in GL_{n+1}(K)$ betrachte den folgenden Homomorphismus graduierter K-Algebren:

$$\begin{aligned} \varphi_A : K[x_0, ..., x_n] &\to K[x_0, ..., x_n] \\ x_j &\mapsto \sum_{i=0}^n a_{ij} x_i \end{aligned}$$

Dann ist φ_A bijektiv vom Grad 1 mit Inversem $\varphi_{A^{-1}}$, denn für $A, B \in GL_{n+1}(K)$ gilt

$$(\varphi_A \circ \varphi_B)(x_j) = \varphi_A(\sum_{i=0}^n b_{ij} x_i) = \sum_{i=0}^n b_{ij} \sum_{k=0}^n a_{ki} x_k = \sum_{k=0}^n (\sum_{i=0}^n a_{ki} b_{ij}) x_k = \varphi_{AB}(x_j),$$

also $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ und offenbar $\varphi_{I_n} = id_{K[x_0,...,x_n]}$. Insbesondere gilt:

$$\varphi_A(K[x_0, ..., x_n]_+) = K[x_0, ..., x_n]_+$$

φ_A definiert also einen Automorphismus $\Phi_A = Proj(\varphi_A) : \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ von K-Schemata. Der resultierende Gruppenhomomorphismus

$$GL_{n+1}(K) \to Aut_K(\mathbb{P}^n_K), A \mapsto \Phi_A^{-1}$$

enthält $\{\lambda I_n; \lambda \in K^\times\}$ in seinem Kern:
Ist nämlich $\lambda \in K^\times$, so ist $\varphi_{\lambda I_n}$ auf jedem homogenen Polynom vom Grad d die Multiplikation mit λ^d. Daher gilt $\varphi_{\lambda I_n}(J) \subseteq J$ für jedes homogene Ideal $J \subseteq K[x_0, ..., x_n]$. Wegen $\varphi_{\lambda^{-1} I_n} = \varphi_{\lambda I_n}^{-1}$ erhält man sogar $\varphi_{\lambda I_n}(J) = J$ und $\varphi_{\lambda I_n}^{-1}(J) = \varphi_{\lambda^{-1} I_n}(J) = J$. Angewandt auf relevante, homogene Primideale zeigt dies $\Phi_{\lambda I_n} = Proj(\varphi_{\lambda I_N}) = id_{\mathbb{P}^n_K}$. Wir erhalten also einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus $PGL_{n+1}(K) \to Aut_K(\mathbb{P}^n_K)$. Den folgenden zentralen Satz zitieren wir ohne Beweis:

Proposition 2.2.2. *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der oben konstruierte Gruppenhomomorphismus $PGL_{n+1}(K) \to Aut_K(\mathbb{P}^n_K)$ ein Isomorphismus.*

Beweis.
Vergleiche *Ch. II, Ex. 7.1.1* aus (Har77).

□

Bemerkungen.

* Auf K-rationalen Punkten entspricht der Automorphismus Φ_A für eine Matrix $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in GL_{n+1}(K)$ der Abbildung:

$$\mathbb{P}^n_K(K) \to \mathbb{P}^n_K(K), [x_0 : ... : x_n] \mapsto [x_0 : ... : x_n] \cdot A := [\sum_{i=0}^n x_i a_{i0} : ... : \sum_{i=0}^n x_i a_{in}]$$

* Wir betrachten nun wie in Proposition 1.4.2 die G-Operation definiert durch

$$f \mapsto \sigma(f) = f_\sigma \circ f \circ f_\sigma^{-1}$$

auf $Aut_L(\mathbb{P}^n_L)$. Diese induziert auf der Gruppe

$$\{f \in Aut_L(L[x_0, ..., x_n]); f \text{ graduiert vom Grad } 1\} (\cong PGL_{n+1}(L))$$

die G-Operation definiert durch

$$f \mapsto \sigma(f) = \sigma_A \circ f \circ \sigma_A^{-1},$$

wobei $A := L[x_0, ..., x_n]$. Für eine Matrix $M = (m_{ij})_{i,j} \in GL_{n+1}(L)$ gilt also:

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi_M)(x_j) &= (\sigma_A \circ \varphi_M \circ \sigma_A^{-1})(x_j) \\ &= (\sigma_A \circ \varphi_M)(x_j) \\ &= \sigma_A(\sum_{i=0}^n m_{ij} x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \sigma(m_{ij}) x_i \end{aligned}$$

Somit entspricht die obige G-Operation auf $Aut_L(\mathbb{P}^n_L)$ der G-Operation definiert durch

$$M \mapsto \sigma(M) = (\sigma(m_{ij}))_{i,j}$$

auf $PGL_{n+1}(L)$ und macht den Gruppenisomorphismus aus Proposition 2.2.2 zu einem Isomorphismus von G-Gruppen.

Hieraus folgt die folgende vereinfachte Identifizierung von Isomorphie-Klassen von Formen über dem projektiven Raum:

Korollar 2.2.3. *Für den projektiven n-Raum $X = \mathbb{P}^n_K$ und eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe G gilt:*

$$F^X_{L|K} \cong H^1(G, PGL_{n+1}(L))$$

Beweis.
Dies folgt direkt aus Theorem 1.4.5 und Proposition 2.2.2 sowie der obigen Bemerkung. □

2.3 Zentrale einfache Algebren

Um die Klassifizierung weiter voranzutreiben, betrachten wir in diesem Kapitel nun die sogenannten Azumaya-Algebren. In diesem Kapitel orientieren wir uns dafür in vielen Beweisen an Ina Kerstens Buch über die Brauergruppe (vgl. (Ker07)).
Wir definieren für einen Ring R das Produkt zweier Teilmengen $I, J \subseteq R$ vermöge

$$IJ := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i; n \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J\}.$$

Bemerkungen.

* Die so definierte Multiplikation von Teilmengen ist assoziativ und es gilt $IJK = \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i; n \in \mathbb{N}, (x_i, y_i, z_i) \in I \times J \times K\}$.
* Ist $I = \{x\}$ (bzw. $J = \{y\}$) einelementig, so schreibe auch $xJ := \{x\}J$ (bzw. $Iy := I\{y\}$).

Definition 2.3.1. *Sei A eine Algebra über einem Körper K.*

*i) A heißt **Schiefkörper** (oder auch **Divisionsalgebra**) über K, falls $A^\times = A\backslash\{0\}$.*

*ii) Eine additive Untergruppe $I \subseteq A$ heißt **Linksideal** (bzw. **Rechtsideal**) von A, falls $AI = I$ (bzw. $IA = I$). Ist I sowohl ein Links- als auch ein Rechtsideal, so heißt es **(zweiseitiges) Ideal** von A.*

*iii) Ein Links-/Rechtsideal $\{0\} \neq I \subseteq A$ heißt **minimales** Links-/Rechtsideal, falls für alle Links-/Rechtsideale $J \subseteq A$ mit $J \subsetneq I$ gilt $J = \{0\}$.*

*iv) $e \in A$ heißt **idempotent**, falls $e^2 = e$.*

Bemerkungen.

* Der Begriff *Körper* ist ausdrücklich für *kommutative* Schiefkörper reserviert.
* Ein Links- (bzw. Rechts-)Modul über einem Schiefkörper D wird häufig auch als D-Links- (bzw. Rechts-)Vektorraum bezeichnet. Viele Erkenntnisse über Vektorräume über Körpern lassen sich analog auf Links-/Rechtsvektorräume über Schiefkörpern übertragen (wie beispielsweise die Existenz einer Basis).
* Für ein Linksideal (bzw. Rechtsideal) $I \subseteq A$ und eine Menge $X \subseteq A$ ist $IX \subseteq A$ wieder ein Linksideal ($XI \subseteq A$ ein Rechtsideal). Ist $X = \{x\}$ einelementig, so gilt $Ix = \{rx; r \in I\}$ (bzw. $xI = \{xr; r \in I\}$).
* Jedes Links-/Rechtsideal einer K-Algebra ist ein K-Vektorraum. Insbesondere existiert in endlich-dimensionalen K-Algebren ein minimales Links-/Rechtsideal (für eine n-dimensionale K-Algebra hat jede echte Kette von Links-/Rechtsidealen höchstens Länge n).

Theorem 2.3.2. ***(Lemma von Brauer)***
Sei A ein Ring, $I \subseteq A$ ein minimales Linksideal mit $I^2 \neq \{0\}$. Dann existiert ein idempotentes Element $e \in I$ mit $I = Ae$, sodass $D := eAe$ ein Schiefkörper ist.

Beweis.
Da $I^2 \neq \{0\}$, existiert ein $x \in I \backslash \{0\}$ mit

$$\{0\} \neq Ix \subseteq I^2 \subseteq I.$$

Da Ix ein Linksideal ist und I minimal, folgt $Ix = I^2 = I$ und somit $ex = x$ für ein $e \in I \backslash \{0\}$. Dann gilt

$$(e^2 - e)x = e^2x - ex = e(ex - x) = 0,$$

d.h. $e^2 - e$ ist enthalten im Linksideal $J := \{s \in I; sx = 0\} \subseteq I$.
Da wegen $Ix \neq \{0\}$ jedoch $J \neq I$ und I minimal, gilt $J = \{0\}$ und somit $e^2 = e$. Insgesamt ist $e \in I$ also ein idempotentes Element, sodass $\{0\} \neq Ae \subseteq AI = I$, also $Ae = I$, da I minimal.

Betrachten wir nun $D := eAe$.
D ist ein Ring mit Eins mit Addition $exe + eye = e(x + y)e$ (Gruppenaxiome folgen aus der Addition in A) und Multiplikation $exe * eye = exe^2ye = exeye$ (das neutrale Element der Multiplikation ist $e = eee$).
Ist $d \in D \backslash \{0\}$, so gilt

$$\{0\} \neq Ad \subseteq AD = AeAe = I^2 = I,$$

also $e \in I = Ad$, da I minimal.
Es existiert also ein $b \in A$ mit $bd = e$, also

$$(ebe)d = ebed = ebd = e^2 = e.$$

Insbesondere gilt $ebe \neq 0$.
Daher existiert analog ein $c \in A$ mit $(ece)(ebe) = e$. Dann gilt jedoch

$$ece = (ece)(ebe)d = d,$$

womit auch $d(ebe) = e$ und damit $d^{-1} = ebe \in eAe$, d.h. $d \in D^\times$. Somit ist D ein Schiefkörper.

□

Bemerkungen.

* Unter den Voraussetzungen vom Satz von Brauer ist I ein D-Rechtsvektorraum über die auf A gegebene Multiplikation als Skalarmultiplikation, denn es gilt:

$$ID = Ae^2Ae = AeAe = I^2 = I$$

* Ist A eine Algebra über einem Körper K, so ist D über die Einbettung

$$K \hookrightarrow D, x \mapsto exe = e^2x = ex$$

ein Schiefkörper über K.

Lemma 2.3.3. *Sei D ein Schiefkörper über einem Körper K und V ein D-Rechtsvektorraum der Dimension $n > 0$. Die K-Algebra*

$$End_D V := \{L : V \to V; L \text{ ist } D\text{-rechtslinear}\}$$

ist isomorph zur K-Algebra $D^{n\times n}$.

Beweis.
Zunächst bemerke, dass der Ring $End_D V$ mit punktweiser Addition und der Verknüpfung als Multiplikation tatsächlich eine K-Algebra ist, wobei die Skalarmultiplikation ebenfalls punktweise gegeben ist. Dies folgt daraus, dass D eine K-Algebra und $L \in End_D V$ somit insbesondere K-linear ist.
Sei nun $\mathcal{B} = (v_1, ...v_n)$ eine D-Basis von V. Für $L \in End_D V$ definieren wir die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = (a_{ij})_{i,j} \in D^{n\times n}$ vermöge $L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij}$ für alle i, j. Da $\mathcal{B}$ eine D-Basis von V ist, folgt mit denselben Argumenten wie in der Linearen Algebra, dass die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\cdot) := (L \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)) : End_D V \to D^{n\times n}$$

ein Isomorphismus von K-Algebren ist.

□

Definition 2.3.4. *Sei A eine K-Algebra.*

i) *$Z(A) := \{a \in A; \forall b \in A : ab = ba\}$ heißt das **Zentrum** von A.*

i) *A heißt **zentral** über K, falls $Z(A) = K$.*

ii) *A heißt **einfach**, falls 0 und A die einzigen zweiseitiges Ideale von A sind.*

iii) *A heißt **Azumaya-Algebra** über K, falls A eine endlich-dimensionale, zentrale, einfache K-Algebra ist.*

Beispiele.

i) Für jeden Schiefkörper D und $n \in \mathbb{N}$ ist $D^{n\times n}$ einfach (dies folgt sofort, da jeder Schiefkörper D offensichtlich einfach ist und die Ideale des Matrizenrings von der Form $I^{n\times n}$ für ein Ideal $I \subseteq D$ sind, vgl. (Lam13), Theorem 3.1).

ii) Für jeden Schiefkörper D ist $Z(D)$ ein Körper (ist $x \in Z(D)\backslash\{0\}$, so gilt für alle $d \in D$ auch $x^{-1}d = x^{-1}dxx^{-1} = x^{-1}xdx^{-1} = dx^{-1}$, also $x^{-1} \in Z(D)$) und D ist ein zentraler $Z(D)$-Schiefkörper. Insbesondere ist jeder Schiefkörper, der endlich-dimensional über seinem Zentrum ist, eine Azumaya-Algebra über seinem Zentrum.

iii) Für jeden Körper K und $n \in \mathbb{N}$ ist $K^{n\times n}$ zentral über K (d.h. nach i) eine Azumaya-Algebra über K), denn:
Ist $A = (a_{ij})_{i,j} \in Z(K^{n\times n})$, so gilt für die kanonischen Basismatrizen E_{ij}, dass $E_{ij}A = AE_{ij}$, weshalb $a_{ii} = a_{jj}$ und $a_{ij} = a_{ji} = 0$ für alle i, j, also folgt:
$A = a_{11}I_n \in K \subseteq K^{n\times n}$.

iv) Für jeden Schiefkörper D und $n \in \mathbb{N}$ gilt $Z(D) \cong Z(D^{n\times n})$ (offensichtlich gilt für $a \in D$, dass $aI_n \in Z(D^{n\times n})$ genau dann, wenn $a \in Z(D)$; der Rest folgt analog zu *iii)*). Insbesondere ist ein Schiefkörper D über K zentral genau dann, wenn $D^{n\times n}$ zentral über K ist.

Wir werden nun versuchen, diese Klasse von Algebren besser zu verstehen. Dies werden wir mit dem Struktursatz von Wedderburn erreichen. Zunächst benötigen wir jedoch ein anderes wichtiges Resultat, das Theorem von Skolem-Noether, für welches wir den folgenden grundlegenden Begriff aus der Ringtheorie benötigen:

Definition 2.3.5. *Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.*
Der Ring $R^{op} := (R, +, *)$, mit der Multiplikation $a * b := b \cdot a$, für $a, b \in R$, heißt der ***Gegenring*** *zu R.*
Ist R eine K-Algebra, so wird R^{op} mit derselben Skalarmultiplikation zur K-Algebra und als ***Gegenalgebra*** *bezeichnet.*

Bemerkung. Für einen kommutativen Ring (bzw. eine kommutative Algebra) R gilt $R = R^{op}$.

Theorem 2.3.6. ***(Skolem-Noether)***
Für einen Körper K ist die Abbildung

$$\Phi : PGL_n(K) \xrightarrow{\sim} Aut_K(K^{n\times n}), A \mapsto (M \mapsto AMA^{-1})$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis.
Betrachten wir zunächst die Abbildung

$$\varphi : GL_n(K) \to Aut_K(K^{n\times n}), A \mapsto (M \mapsto AMA^{-1}).$$

Diese ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus und für $A \in GL_n(K)$ gilt:

$$\begin{aligned} A \in ker(\varphi) &\Leftrightarrow (M \mapsto AMA^{-1}) = id_{K^{n\times n}} \\ &\Leftrightarrow \forall M \in K^{n\times n} : AMA^{-1} = M \\ &\Leftrightarrow A \in Z(K^{n\times n}) = \{\lambda I_n ; \lambda \in K\} \end{aligned}$$

Somit ist Φ wohldefiniert und injektiv.

Sei nun $\varphi \in Aut_K(K^{n\times n})$.
Wir fassen die K-Algebra $K^{n\times n}$ über die folgenden zwei Skalarmultiplikationen als Modul über $R := K^{n\times n} \otimes_K (K^{n\times n})^{op} \cong End_K(K^{n\times n}) \cong K^{n^2\times n^2}$ auf (für die Isomorphie vgl. (Ker07), 3.3):

$$(A \otimes B) \cdot C := ACB$$
$$(A \otimes B) * C := \varphi(A)CB$$

Da φ K-linear ist, folgt auch die Wohldefiniertheit der unteren Modulstruktur. Benenne diese R-Moduln mit M_1 bzw. M_2. Nun ist $R = K^{n^2\times n^2}$, wie in Beispiel i) oben bemerkt, einfach, weshalb jeder R-Modul halbeinfach ist (siehe (Lan02), Proposition 4.1). Somit sind M_1 und M_2 eine Summe von einfachen R-Moduln. Da jedoch über $K^{n^2\times n^2}$ alle einfachen Moduln isomorph sind (vgl. (Ker07), 1.8), können wir für einen fest gewählten einfachen R-Modul M_e

$$M_1 \cong \sum_{i\in I} M_e \text{ und } M_2 \cong \sum_{j\in J} M_e$$

als R-Moduln schreiben. Da R eine K-Algebra ist, können wir M_e, M_1 und M_2 auch als K-Vektorräume auffassen. Da M_1 und M_2 als K-Vektorräume dieselbe endliche Dimension haben, gilt $|I| = |J|$ und damit auch $M_1 \cong M_2$ als R-Moduln. Sei also $h : M_1 \to M_2$ ein R-Modulisomorphismus und setze $A := h(I_n)$. Dann gilt für alle $M \in K^{n\times n}$:

$$\begin{aligned}\varphi(M)A &= (M \otimes I_n) * h(I_n) = h((M \otimes I_n) \cdot I_n) = h(M)\\ &= h((I_n \otimes M) \cdot I_n) = (I_n \otimes M) * h(I_n) = AM\end{aligned}$$

Da h ein Isomorphismus ist, ergibt die erste Zeile dieser Gleichung mit $M = h^{-1}(I_n)$, dass $A \in GL_n(K)$ und es folgt $\varphi(M) = AMA^{-1}$ für alle $M \in K^{n\times n}$, also $\varphi = \Phi(A)$. Insgesamt ist Φ somit ein Gruppenisomorphismus.

□

Bemerkung. Eine allgemeinere Version des Satzes von Skolem-Noether besagt, dass jeder Automorphismus einer Azumaya-Algebra ein innerer Morphismus ist, d.h. gegeben durch Konjugation mit einer Einheit (vgl. (Ker07), Satz 4.2).

Theorem 2.3.7. ***(Struktursatz von Wedderburn)***
Sei A eine Azumaya-Algebra über einem Körper K. Dann existiert ein zentraler Schiefkörper D über K und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $A \cong D^{n\times n}$.

Beweis.
Sei I ein minimales Linksideal von A (vgl. Bemerkung nach Def. 2.3.1). Dann ist $IA \subseteq A$ ein zweiseitiges Ideal und somit das Einsideal (da $IA \neq \{0\}$ und A einfach). Damit folgt:

$$\{0\} \neq A = A^2 = (IA)^2 = I(AI)A = I^2A$$

Damit ist $I^2 \neq \{0\}$.
Nach dem Lemma von Brauer 2.3.2 existiert somit ein idempotentes Element $e \in I$ mit $I = Ae$, sodass $D := eAe$ ein Schiefkörper über K ist. Nach der an Theorem 2.3.2 anschließenden Bemerkung ist I ein D-Rechtsvektorraum.
Die Linksmultiplikation $L_a : I \to I, x \mapsto ax$ ist für alle $a \in A$ eine D-rechtslineare Abbildung, denn es gilt $a(xd) = (ax)d$ für alle $a \in A$, $x \in I$, $d \in D$. Der resultierende Homomorphismus $L : A \to End_D(I), a \mapsto L_a$, von K-Algebren ist injektiv, da $1 \notin ker(L)$ und $ker(L)$ ein zweiseitiges Ideal von A ist, weshalb $ker(L) = 0$, wobei wir erneut ausnutzen, dass A einfach ist.
Nun gilt $A = IA = AeA$, weshalb $1 = \sum_{i=1}^n x_iey_i$ für gewisse $x_i, y_i \in A$. Für ein beliebiges $f \in End_D(I)$ folgt dann für alle $a \in A$:

$$\begin{aligned} f(ae) &= f((\sum_{i=1}^n x_iey_i)ae) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_ie)ey_iae \text{ (NB: } e = e^2 \text{ und } ey_iae \in D) \\ &= L(\sum_{i=1}^n f(x_ie)ey_i)(ae) \\ \Rightarrow f &= L(\sum_{i=1}^n f(x_ie)ey_i) \end{aligned}$$

Somit ist L ein Isomorphismus von K-Algebren.
Zudem gilt $dim_K I \leqslant dim_K A < \infty$, also insbesondere $n := dim_D I < \infty$. Nach Lemma 2.3.3 folgt somit $A \cong D^{n\times n}$ als K-Algebren. Da A und damit $D^{n\times n}$ zentral sind, folgt auch, dass D zentral ist (vgl. Beispiel *iv*) nach Definition 2.3.4).

□

Bemerkung. Die Darstellung $A \cong D^{n\times n}$ einer Azumaya-Algebra A aus Theorem 2.3.7 ist bis auf Isomorphie des Schiefkörpers D eindeutig bestimmt (vgl. (Ker07), 1.10).

Satz 2.3.8. *Für eine K-Algebra A und eine beliebige Körpererweiterung $L|K$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) A ist eine Azumaya-Algebra über K

ii) A_L ist eine Azumaya-Algebra über L

Insbesondere lässt sich das Theorem vom Galoisabstieg 1.2.3 analog auf die Kategorie der Azumaya-Algebren einschränken.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii)

Sei $I \in A_L$ ein zweiseitiges Ideal mit $I \neq \{0\}$ und $a_L = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes l_i \in I \backslash \{0\}$ mit minimalem m. Wegen der Minimalität ist die Familie $(l_1, ..., l_m)$ linear unabhängig über K und $a_1 \neq 0$. Somit gilt $Aa_1A = A$, weil A einfach ist. Es existieren also $b_i, c_i \in A$, sodass $\sum_i b_i a_1 c_i = 1 \in A$. Somit gilt $\sum_{j=1}^{m}(\sum_i b_i a_j c_i) \otimes l_j = \sum_i b_i a_L c_i \in I$ und wir können o.B.d.A. $a_1 = 1$ annehmen.
Angenommen, es existiert $j \neq 1$ mit $a_j \in A \backslash K$. Da A zentral, existiert dann ein $d \in A$, sodass $a_j d \neq d a_j$. Dann gilt $0 \neq \sum_{i=2}^{m}(da_i - a_i d) \otimes l_i = da_L - a_L d \in I$, da die l_i K-linear unabhängig sind und damit die $1 \otimes l_i$ A-linear unabhängig. Das steht jedoch im Widerspruch zur Minimalität von m.
Somit gilt $a_j \in K$ für alle j, d.h. es gilt $a_L = 1 \otimes (\sum_{i=1}^{m} a_i l_i) \in I$ und es folgt $m = 1$.
Da L jedoch ein Körper ist, folgt $1 \otimes 1 \in I$ und somit $I = A_L$, also ist A_L einfach.

Sei nun $a_L = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes l_i \in Z(A_L)$ mit K-linear unabhängigen l_i. Dann gilt für $a \in A$ $\sum_{i=1}^{n} aa_i \otimes l_i = aa_L = a_L a = \sum_{i=1}^{n} a_i a \otimes l_i$ und damit, da die l_i K-linear unabhängig sind, bereits $aa_i = a_i a$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Da $a \in A$ beliebig gewählt war, folgt somit $a_i \in Z(A) = K$ für alle i, also $a_L = 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} a_i l_i \in 1 \otimes_K L = L$. Insgesamt folgt $L \subseteq Z(A_L) \subseteq L$, also A_L zentral.

Zudem gilt $dim_L A_L = dim_K A$, womit A_L also eine Azumaya-Algebra über L ist.

ii) $\Rightarrow$ i)

Sei also A_L eine Azumaya-Algebra über L. Offensichtlich ist A mit derselben Argumentation endlich-dimensional über K.

Sei $0 \neq I \subseteq A$ ein zweiseitiges Ideal. I ist insbesondere ein K-Untervektorraum, für den $I_L := I \otimes_K L \subseteq A_L$ ein Ideal ist. Da $I_L \neq 0$, gilt also $I_L = A_L$, da A_L einfach nach Voraussetzung. Aus $dim_K I = dim_L I_L = dim_L A_L = dim_K A$ folgt dann $I = A$, weshalb A einfach ist.

Angenommen, A ist nicht zentral, dann existiert ein Element $a \in Z(A) \backslash K$. Dann gilt aber $a_L = a \otimes 1 \in Z(A_L) \backslash L$ mit denselben Argumenten wie oben, im Widerspruch zur Annahme.

$\square$

Bemerkung. Man kann ebenso etwas allgemeiner zeigen: Sind A, B einfache K-Algebren und ist A zentral, so ist $A \otimes_K B$ einfach. Sind zusätzlich A und B Azumaya-Algebren, so auch $A \otimes_K B$ (vgl. (Ker07), Sätze 2.6 und 2.7).

Definition 2.3.9. *Sei $L|K$ eine Körpererweiterung.*

*i) L heißt **Zerfällungskörper** einer K-Algebra A, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $A_L \cong L^{n\times n}$ als L-Algebren.*

*ii) Für eine Azumaya-Algebra A über K heißt $grad_K A := \sqrt{dim_K A}$ der **Grad** von A über K.*

*iii) Für eine Azumaya-Algebra $A \cong D^{n\times n}$ (vgl. 2.3.7) über K heißt $ind_K A := \sqrt{dim_K D}$ der **Index** von A über K.*

Bemerkungen.

* Für eine Azumaya-Algebra $A \cong D^{n\times n}$ ergibt sich sofort, dass $grad_K A = n * ind_K A$.
* Für eine Skalarerweiterung A_L einer Azumaya-Algebra gilt offensichtlich

$$grad_K A = \sqrt{dim_K A} = \sqrt{dim_L A_L} = grad_L A_L.$$

Es bleibt jedoch die Frage, ob der Index eine ganze Zahl ist, d.h. ob eine Azumaya-Algebra über ihrem Zentrum von quadratischer Dimension ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass jede Azumaya-Algebra einen Zerfällungskörper besitzt.

Lemma 2.3.10. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für jeden endlich-dimensionalen Schiefkörper D über K gilt $D = K$.*

Beweis.
Sei $x \in D$ und betrachte den von K und x erzeugten Unterring $K[x] \subseteq D$. Da $K \subseteq Z(D)$, folgt

$$K[x] = \{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i; a_i \in K \text{ mit } a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}\} \subseteq D$$

und damit, dass $K[x]$ kommutativ ist.
Als Unterring des Schiefkörpers D ist $K[x]$ ein Integritätsbereich, der wegen $dim_K K[x] \leqslant dim_K D < \infty$ endlich und insbesondere ganz über K ist. Daraus folgt, dass $K[x]$ selbst ein Körper ist.
Da K algebraisch abgeschlossen, ist die endliche Körpererweiterung $K[x]|K$ trivial, d.h. $x \in K[x] = K$. Da $x \in D$ beliebig war, folgt $D = K$.

□

Bemerkung. Insbesondere gilt also für jede Azumaya-Algebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K nach dem Struktursatz von Wedderburn $ind_K A = 1$.

Satz 2.3.11. *Sei A eine Azumaya-Algebra über einem Körper K. Für einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass*

$$A_{\overline{K}} \cong (\overline{K})^{n\times n}.$$

Insbesondere besitzt jede Azumaya-Algebra einen Zerfällungskörper und ist von quadratischer Dimension über ihrem Zentrum K.

Beweis.
Da A eine Azumaya-Algebra über K ist, folgt mit Proposition 2.3.8, dass $A_{\overline{K}}$ eine Azumaya-Algebra über $\overline{K}$ ist. Nach Lemma 2.3.10 besitzt $A_{\overline{K}}$ also Index 1, d.h. es gilt $A_{\overline{K}} = \overline{K}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (n ist genau der Grad von A über K).

□

Bemerkung. Für einen endlich-dimensionalen Schiefkörper D über seinem Zentrum K gilt somit $ind_K D = grad_K D \in \mathbb{N}$, womit auch für jede Azumaya-Algebra A über K $ind_K A \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 2.3.12. *Sei K ein Körper.*

i) Zwei Azumaya-Algebren A, B über K heißen ***ähnlich*** *(oder* ***Brauer-äquivalent****), in Zeichen $A \sim B$, falls $m, n \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $A \otimes_K K^{n\times n} \cong B \otimes_K K^{m\times m}$ als K-Algebren.*

ii) Die Menge

$$Br(K) = \{A; A \text{ Azumaya-Algebra über } K\}/_\sim$$

heißt die ***Brauergruppe*** *von K.*

Bemerkungen.

* Die Relation $\sim$ aus Teil i) der Definition ist in der Tat eine Äquivalenzrelation und für zwei Azumaya-Algebren $A \cong D_A^{n\times n}$, $B \cong D_B^{m\times m}$ (vgl. Struktursatz 2.3.7) gilt $A \sim B$ genau dann, wenn $D_A \cong D_B$ als K-Algebren (vgl. (Ker07), Kapitel 3.4).

* Für zwei Azumaya-Algebren A und B über K gilt:

$$[A \sim B \ \wedge grad_K A = grad_K B] \Leftrightarrow A \cong B$$

* Die Brauergruppe $Br(K)$ ist eine abelsche Gruppe mit der Verknüpfung

$$[A] * [B] = [A \otimes_K B]$$

  und Einselement $[K]$. Für $[A] \in Br(K)$ ist die Inverse durch die Äquivalenzklasse der Gegenalgebra $[A^{op}]$ gegeben (siehe (Ker07), Kapitel 3.5).

* Für algebraisch abgeschlossene Körper K gilt nach Satz 2.3.11 $Br(K) = \{[K]\}$, d.h. $Br(K) = 1$ ist die triviale Gruppe.

* Die Gruppe $Br(K)$ besitzt eine kohomologische Beschreibung als zweite Galoiskohomologiegruppe der Einheitengruppe eines separablen Abschlusses von K (vgl. (Ker07), Satz 8.7 und Beispiel 15.5).

Bezeichne nun mit $Az^n_{L|K}$ die Menge der Isomorphieklassen aller Azumaya-Algebren über K vom Grad n mit Zerfällungskörper L. Bemerke, dass $|Az^n_{L|K}| \leqslant |Br(K)|$.
$Az^n_{L|K}$ ist eine punktierte Menge mit ausgezeichnetem Element $[K^{n\times n}]$.

Satz 2.3.13. *Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe $G := Gal(L|K)$ und $n \in \mathbb{N}$ besteht folgende Bijektion punktierter Mengen*

$$Az^n_{L|K} \cong H^1(G, PGL_n(L)).$$

Beweis.
Sei $[A] \in Az^n_{L|K}$, d.h. es existiert ein Isomorphismus $f : A_L \xrightarrow{\sim} L^{n\times n}$ von L-Algebren. Nach dem Theorem 2.3.6 existiert für jedes $\sigma \in G$ genau ein $a_\sigma \in PGL_n(L)$, sodass $\Phi(a_\sigma) = f \circ \sigma_A \circ f^{-1} \circ \sigma^{-1}$, wobei $\sigma((a_{ij})_{i,j}) = (\sigma(a_{ij}))_{i,j}$ und $\sigma_A = id_A \otimes \sigma$ die durch die kanonischen G-Operationen induzierten Automorphismen auf $L^{n\times n}$ bzw. A_L sind. Beachte hierfür, dass die Abbildung $f \circ \sigma_A \circ f^{-1} \circ \sigma^{-1} : L^{n\times n} \to L^{n\times n}$ tatsächlich ein L-linearer Automorphismus ist.
Dann gilt für alle $\sigma, \tau \in G$

$$\begin{aligned}
\Phi(a_{\sigma\tau}) \circ \sigma\tau \circ f &= f \circ (\sigma\tau)_A \\
&= f \circ \sigma_A \circ \tau_A \\
&= \Phi(a_\sigma) \circ \sigma \circ f \circ \tau_A \\
&= \Phi(a_\sigma) \circ \sigma \circ \Phi(a_\tau) \circ \tau \circ f \\
&= \Phi(a_\sigma) \circ \Phi(\sigma(a_\tau)) \circ \sigma \circ \tau \circ f \\
&= \Phi(a_\sigma \sigma(a_\tau)) \circ \sigma\tau \circ f
\end{aligned}$$

(wobei die vorletzte Gleichheit gilt, da $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$ und $\Phi(a_\tau)$ die Konjugation mit der Matrix a_τ ist).
Somit gilt $\Phi(a_{\sigma\tau}) = \Phi(a_\sigma\sigma(a_\tau))$, d.h. $a_{\sigma\tau} = a_\sigma\sigma(a_\tau)$ nach Theorem 2.3.6, womit a einen Kozyklus definiert. Betrachte nun die Abbildung

$$Az^n_{L|K} \to H^1(G, PGL_n(L)), [A] \mapsto [a].$$

Offensichtlich gilt für $A = K^{n\times n}$ bei Wahl von $f = id_{L^{n\times n}}$, dass $a_\sigma = I_n$ für alle $\sigma \in G$ (da $\sigma_A = \sigma$).

Wohldefiniertheit:
In der Konstruktion von a haben wir einen Repräsentanten A und einen Isomorphismus $f : A_L \to L^{n \times n}$ gewählt. Sei B ein weiterer Repräsentant mit den Isomorphismen $h : A \xrightarrow{\sim} B$, $g : B_L \xrightarrow{\sim} L^{n \times n}$ und zugehörigem Kozyklus b.
Sei $m \in PGL_n(K)$ mit $\Phi(m) = f \circ h_L^{-1} \circ g^{-1}$. Dann gilt für $\sigma \in G$:

$$\begin{aligned}
\Phi(b_\sigma) \circ \sigma \circ g &= g \circ \sigma_B \\
&= \Phi(m)^{-1} \circ f \circ h_L^{-1} \circ \sigma_B \\
&= \Phi(m)^{-1} \circ f \circ \sigma_A \circ h_L^{-1} \\
&= \Phi(m)^{-1} \circ \Phi(a_\sigma) \circ \sigma \circ f \circ h_L^{-1} \\
&= \Phi(m^{-1} a_\sigma) \circ \sigma \circ \Phi(m) \circ g \\
&= \Phi(m^{-1} a_\sigma \sigma(m)) \circ \sigma \circ g
\end{aligned}$$

Daraus folgt $b_\sigma = m^{-1} a_\sigma \sigma(m)$, womit a und b kohomolog sind und die Abbildung somit wohldefiniert ist.

Injektivität:
Seien zwei Azumaya-Algebren A und B vom Grad n mit Zerfällungskörper L und zugehörigen Kozyklen $a \sim b$ gegeben, etwa $(b_\sigma)_\sigma = (m^{-1} a_\sigma \sigma(m))_\sigma$ für ein $m \in PGL_n(L)$. Dann gilt für gegebene Isomorphismen $f : A_L \to L^{n \times n}$ und $g : B_L \to L^{n \times n}$ und alle $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}
g \circ \sigma_B \circ g^{-1} &= \Phi(b_\sigma) \circ \sigma \\
&= \Phi(m^{-1} a_\sigma \sigma(m)) \circ \sigma \\
&= \Phi(m)^{-1} \circ f \circ \sigma_A \circ f^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \Phi(\sigma(m)) \circ \sigma \\
&= \Phi(m)^{-1} \circ f \circ \sigma_A \circ f^{-1} \circ \Phi(m),
\end{aligned}$$

womit

$$\sigma_B \circ g^{-1} \circ \Phi(m)^{-1} \circ f = g^{-1} \circ \Phi(m)^{-1} \circ f \circ \sigma_A.$$

Somit kommutiert für alle $\sigma \in G$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_L \arrow[r, "g^{-1}\circ\Phi(m)^{-1}\circ f"] & B_L \\
A_L \arrow[u, "\sigma_A"] \arrow[r, "g^{-1}\circ\Phi(m)^{-1}\circ f"] & B_L, \arrow[u, "\sigma_B"']
\end{tikzcd}$$

d.h. der Isomorphismus $g^{-1} \circ \Phi(m)^{-1} \circ f$ ist mit den σ-linearen Operationen verträglich und induziert somit nach Galoisabstieg einen Isomorphismus $A \cong B$ von K-Algebren, sodass $[A] = [B]$.

Surjektivität:
Sei ein Kozyklus $a : G \to PGL_n(L)$ gegeben. Die semilineare G-Operation auf $L^{n \times n}$

$$G \to Aut(L^{n \times n}), \sigma \mapsto \Phi(a_\sigma) \circ \sigma$$

(vgl. Theorem 2.3.6 und die Argumente in der Bemerkung nach Definition 1.4.3) induziert via Galoisabstieg für Azumaya-Algebren (vgl. Satz 2.3.8) eine Azumaya-Algebra A über K vom Grad n zusammen mit einem Isomorphismus $f : A_L \xrightarrow{\sim} L^{n \times n}$, sodass

$$\begin{tikzcd} A_L \arrow[r, "f"] & L^{n \times n} \\ A_L \arrow[u, "\sigma_A"] \arrow[r, "f"] & L^{n \times n}, \arrow[u, "\Phi(a_\sigma) \circ \sigma"'] \end{tikzcd}$$

womit $\Phi(a_\sigma) = f \circ \sigma_A \circ f^{-1} \circ T_\sigma^{-1}$ und somit $[a]$ das Bild von $[A]$ ist.

□

Korollar 2.3.14. *Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$, $n \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{P}_K^n$ besteht folgende Bijektion punktierter Mengen*

$$Az_{L|K}^{n+1} \cong F_{L|K}^X.$$

Beweis.
Dies folgt sofort aus Korollar 2.2.3 und Satz 2.3.13.

□

2.4 Folgerungen für Brauer-Severi-Varietäten

Wir wollen nun die Bijektion aus dem Korollar 2.3.14 anwenden, um Brauer-Severi-Varietäten über bestimmten Körpern genauer zu bestimmen.

Aus dem Lemma 2.3.10 folgt sofort eine einfache Beschreibung von Brauer-Severi-Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern:

Proposition 2.4.1. *Sei K ein algebraisch abgschlossener Körper und X eine Brauer-Severi-Varietät über K. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit:*

$$X \cong \mathbb{P}^n_K$$

Mit anderen Worten: Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besitzt der projektive n-Raum keine nicht-trivialen Formen.

Beweis.
Nach Lemma 2.3.10 gilt $Br(K) = \{[K]\}$ und somit

$$1 \leqslant |Az^{n+1}_{L|K}| \leqslant |Br(K)| = 1,$$

d.h. $Az^{n+1}_{L|K} = \{[K^{(n+1)\times(n+1)}]\}$.
Nach der Bijektion aus Korollar 2.3.14 gilt also $F^{\mathbb{P}^n_K}_{L|K} = \{[\mathbb{P}^n_K]\}$, womit $X \cong \mathbb{P}^n_K$.

□

Ein analoges Resultat für Brauer-Severi-Varietäten über endlichen Körpern folgt aus dem folgenden Theorem:

Theorem 2.4.2. ***(Kleiner Satz von Wedderburn)***
Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ, d.h. ein Körper.

Beweis. (Dieser Beweis orientiert sich an der Beweisidee von der Website (pla18))
Sei also ein endlicher Schiefkörper D gegeben und $K := Z(D)$ sein Zentrum. Setze $d := |D|$ und $q := |Z(D)|$. Wir führen nun den Beweis per Induktion über $d \geqslant 2$:
Im Fall $d = 2$ ist $D = \{0, 1\}$ offensichtlich ein Körper.
Nehme nun an, dass für $m < d$ jeder Schiefkörper der Mächtigkeit m ein Körper ist. D ist endlich und damit ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Es existiert also ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $d = q^n$.
Angenommen, es gibt $x \in D \backslash K$, dann ist der Zentralisator

$$C_D(x) := \{y \in D; xy = yx\}$$

ein Schiefkörper, denn $C_D(x)$ ist offenbar eine additive Untergruppe von D und für alle $y \in C_D(x) \backslash \{0\}$ gilt $xy = yx \Rightarrow y^{-1}x = xy^{-1}$, also $y^{-1} \in C_D(x)$.

Ferner gilt $C_D(x) \subsetneq D$, da sonst $x \in K$. Somit ist $C_D(x)$ nach Induktionsannahme ein Körper über K und es gibt ein $n_x < n$ mit

$$|C_D(x)| = q^{n_x}.$$

Fassen wir D nun als einen Vektorraum über $C_D(x)$ auf, so existiert zudem ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$q^n = d = |D| = |C_D(x)|^m = q^{n_x m},$$

d.h. $n_x | n$ in $\mathbb{Z}$. Es sei $(x_i)_{i \in I}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der nicht zentralen Konjugationsklassen von $D^\times$. Dann lautet die Klassengleichung für die Gruppe $D^\times$:

$$q^n - 1 = |D^\times| = |K^\times| + \sum_{i \in I} \frac{|D^\times|}{|C_D(x_i)|} = q - 1 + \sum_{i \in I} \frac{q^n - 1}{q^{n_{x_i}} - 1}$$

Sei nun $\Phi_n(t) = \Pi_\xi (t - \xi) \in \mathbb{Z}[t]$ das n-te Kreisteilungspolynom, wobei ξ die Menge der primitiven Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ durchläuft.
Wir erinnern daran, dass $t^m - 1 = \Pi_{d|m} \Phi_d(t)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, weswegen $\Phi_n(t) \mid t^n - 1$ und $\Phi_n(t) \mid \frac{t^n - 1}{t^{n_{x_i}} - 1}$ in $\mathbb{Z}[t]$ für alle $i \in I$ (NB: $n_{x_i} < n$). Insbesondere gilt $\Phi_n(q) \mid q^n - 1$ und $\Phi_n(q) \mid \frac{q^n - 1}{q^{n_{x_i}} - 1}$ in $\mathbb{Z}$. Aus der Klassengleichung folgt somit $\Phi_n(q) \mid q - 1$, also

$$|\Phi_n(q)| \leqslant |q - 1|. \tag{2.1}$$

Andererseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|q - \xi| \geqslant ||q| - |\xi|| = |q - 1| \geqslant 1 \tag{2.2}$$

für jede primitive n-te Einheitswurzeln $\xi \in \mathbb{C}$.
Angenommen $n > 1$. Dann gilt für jede primitive n-te Einheitswurzel ξ, dass $Re(\xi) < 1$, weswegen insbesondere $|q - \xi| > |q - 1|$. Dann folgt aber schon mit (2.2)

$$|\Phi_n(q)| = \Pi_\xi |q - \xi| > |q - 1|,$$

im Widerspruch zu (2.1). Also ist $n = 1$ und damit $D = K$ ein Körper.

□

Satz 2.4.3. *Sei K endlich und X eine Brauer-Severi-Varietät über K. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$X \cong \mathbb{P}^n_K.$$

Mit anderen Worten: Über einem endlichen Körper besitzt der projektive n-Raum keine nicht-trivialen Formen.

Beweis.
Ist D ein endlich-dimensionaler, zentraler Schiefkörper über K, so ist D insbesondere endlich und somit gilt nach dem Kleinen Satz von Wedderburn $D = K$. Damit gilt $Br(K) = \{[K]\}$ und somit folgt die Aussage analog zum Beweis von Proposition 2.4.1.

□

Bemerkung. Wir haben also gezeigt, dass die Brauergruppe $Br(K)$ für endliche und für algebraisch abgeschlossene Körper die triviale Gruppe $\{1\}$ ist. Auch für andere Klassen von Körpern K lässt sich die Brauergruppe $Br(K)$ bestimmen:
Im Fall der lokalen Körper K gilt beispielsweise $Br(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dies wird ausführlich in (Ker07) behandelt.
Für die Brauergruppe der reellen Zahlen gilt $Br(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei die nichttriviale Klasse von den Hamiltonschen Quaternionen repräsentiert wird (vgl. (Ker07), Satz 6.5). Es folgt, dass für $n \neq 1$ jede $\mathbb{C}$-Form von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ trivial ist. Für $n = 1$ gibt es bis auf Isomorphie genau zwei $\mathbb{C}$-Formen, wobei die nichttriviale Form notwendigerweise das Beispiel *ii)* aus Abschnitt 1.1 ist.

Kommen wir nun zu dem letzten großen Satz dieses Abschnitts, dem Theorem von Châtelet. Dafür setzen wir wie in unserer Vorlage (Jah00) die folgende Proposition als gegeben voraus:

Proposition 2.4.4. *Jede Brauer-Severi-Varietät besitzt einen endlichen galoisschen Zerfällungskörper.*

Diese Aussage ist in der Tat nicht offensichtlich. Zumeist wird für den Beweis das untenstehende Theorem von Châtelet verwendet, aus dem diese Aussage umgekehrt wiederum als Korollar abgeleitet werden kann (vgl. (GW10), 14.92).

Lemma 2.4.5. *Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe G und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$H^1(G, GL_n(L)) = 0.$$

Beweis.
Sei $[a] \in H^1(G, GL_n(L))$. Wir wollen zeigen, dass a und der triviale Kozyklus 1 kohomolog sind.
Betrachte die σ-lineare Operation $a_\sigma \circ \sigma_{K^n} : L^n \to L^n$ auf dem L-Vektorraum L^n (wobei a_σ als Automorphismus aufgefasst wird). Diese induziert durch Galoisabstieg für Vektorräume einen n-dimensionalen K-Vektorraum V (o.B.d.A. also $V = K^n$) zusammen mit einem Isomorphismus $\varphi : K^n_L \cong L^n \xrightarrow{\sim} L^n$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_{K^n}"] & L^n \arrow[d, "a_\sigma \circ \sigma_{K^n}"] \\ L^n \arrow[r, "\varphi"] & L^n \end{tikzcd}$$

kommutiert, womit $a_\sigma = \varphi \circ \sigma_{K^n} \circ \varphi^{-1} \circ \sigma_{K^n}^{-1} = \varphi \circ id_{L^n} \circ {}^\sigma\varphi^{-1}$ für alle $\sigma \in G$. Folglich ist $[a] = [id_{L^n}]$ kohomolog zum trivialen Kozyklus.

$\square$

Theorem 2.4.6. ***(Satz von Châtelet)***
Sei X eine Brauer-Severi-Varietät über K mit $X(K) \neq \varnothing$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$X \cong \mathbb{P}^n_K.$$

Beweis.
Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung, sodass L ein Zerfällungskörper von X ist (vgl. Proposition 2.4.4), $G := Gal(L|K)$ und $g : X \to Spec(K)$ der Strukturmorphismus von X. Sei $x \in X(K)$, d.h. $g \circ x = id_{Spec(K)}$, wobei $x : Spec(K) \to X$ als Morphismus von K-Schemata aufgefasst wird. Dann ist $x_L \in X_L(L)$, da für den Strukturmorphismus $g_L : X_L \to Spec(L)$ die Gleichung $g_L \circ x_L = (g \circ x)_L = id_{Spec(L)}$ gilt.
Nun sei $\alpha : X_L \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^n_L$ ein Isomorphismus von L-Schemata. Durch geeignete Wahl eines Automorphismus auf $\mathbb{P}^n_L$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$\alpha(x_L) = [1 : 0 : ... : 0] \in \mathbb{P}^n_L(L).$$

Sei nun $(\alpha_\sigma)_\sigma \in H^1(G, PGL_{n+1}(L))$ der bis auf Kohomologie eindeutig zu X zugehörige Kozyklus (vgl. Korollar 2.2.3).
Bezeichne $(f_\sigma)_\sigma$ bzw. $(g_\sigma)_\sigma$ die kanonische kompatible G-Operation auf $\mathbb{P}^n_L$ bzw. X_L. Indem wir die Matrizen α_σ als Automorphismen von $\mathbb{P}^n_L$ auffassen (vgl. Proposition 2.2.2), ist $[1 : 0 : ... : 0]$ ein Fixpunkt für alle α_σ, denn für alle $\sigma \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_\sigma([1 : 0 : ... : 0]) &= (\alpha \circ g_\sigma \circ \alpha^{-1} \circ f_\sigma)([1 : 0 : ... : 0]) \text{ (vgl. Theorem 1.4.5)}\\
&= (\alpha \circ g_\sigma \circ \alpha^{-1})([1 : 0 : ... : 0]) \text{ (da } f_\sigma([x_0, ..., x_n]) = [\sigma(x_0), ..., \sigma(x_n)] \text{ für}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{alle } [x_0, ..., x_n] \in \mathbb{P}^n_L(L))\\
&= (\alpha \circ g_\sigma)(x_L)\\
&= \alpha(x_L) \text{ (da } x_L \text{ durch Basiswechsel von einem } K\text{-rationalen Punkt kommt)}\\
&= [1 : 0 : ... : 0]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Betrachte nun die G-Untergruppe

$$F/L^\times := \{(a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in GL_{n+1}(L); a_{10} = ... = a_{n0} = 0\}/L^\times \leqslant PGL_{n+1}(L)$$

Für diese Gruppe induziert die Inklusion $\iota : F/L^\times \hookrightarrow PGL_{n+1}(L)$ in kanonischer Weise einen Morphismus punktierter Mengen

$$\varphi : H^1(G, F/L^\times) \to H^1(G, PGL_{n+1}(L)), [a] \mapsto [\iota \circ a] = [(\iota(a_\sigma))_\sigma],$$

und die Eigenschaft (2.3) der α_σ zeigt, dass α im Bild von φ liegt.
Nun ist jedoch

$$\begin{aligned}
\psi : F/L^\times &\to F' := \{(a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in GL_{n+1}(L); \forall\ 0 \leqslant i \leqslant n : a_{i0} = \delta_{i0}\}\\
[(a_{ij})_{i,j}] &\mapsto (\frac{1}{a_{00}} a_{ij})_{i,j}
\end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
F/L^\times \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, "\psi"] & PGL_{n+1}(L) \\
F' \arrow[r, hook, "\subseteq"] & GL_{n+1}(L) \arrow[u, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

Um dies zu sehen, betrachtet man für ein Element $[(a_{ij})] \in F/L^\times$ einfach den Repräsentanten $(\frac{1}{a_{00}} a_{ij})_{i,j} \in F' \subseteq F$.
Diese Homomorphismen induzieren nun wieder in kanonischer Weise Morphismen punktierter Mengen

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(G, F/L^\times) & \to & H^1(G, GL_{n+1}(L)) & \to & H^1(G, PGL_{n+1}(L)) \\
[a] & \mapsto & [(\psi(a_\sigma))_\sigma] & \mapsto & [((\pi \circ \psi)(a_\sigma))_\sigma] = \varphi([a]).
\end{array}$$

Nach Lemma 2.4.5 gilt jedoch $H^1(G, GL_{n+1}(L)) = \{1\}$, weshalb das Bild von φ nur das triviale Element 1 enthält und somit der zu X zugehörige Kozyklus α der triviale Kozyklus ist. Durch Ausnutzen der Isomorphie aus Korollar 2.2.3 ergibt sich also, dass $[X] = [\mathbb{P}^n_K]$ das ausgezeichnete Element ist, also $X \cong \mathbb{P}^n_K$ als K-Schemata.

□

3 Formen affiner Räume

Im Fall der affinen Räume ist eine Klassifizierung der Formen schwieriger. Dies liegt vor allem daran, dass die Struktur der Gruppe $Aut_K(\mathbb{A}_K^n) \cong Aut_K(K[t_1, ..., t_n])$ im Allgemeinen viel komplizierter ist als beim projektiven Raum.

Proposition 3.1. *Sei (A, T) eine G-Gruppe, $N \trianglelefteq A$ eine normale G-invariante Untergruppe. Dann ist die natürliche Sequenz von punktierten Mengen*

$$H^1(G, N) \xrightarrow{\varphi} H^1(G, A) \xrightarrow{\psi} H^1(G, A/N)$$

exakt, d.h. $im(\varphi) = \psi^{-1}([1])$.
Insbesondere folgt aus $H^1(G, N) = 1 = H^1(G, A/N)$, dass auch $H^1(G, A) = 1$ die triviale punktierte Menge ist.

Beweis.
Wir bezeichnen mit $\iota : N \hookrightarrow A$ die Inklusion und mit $\pi : A \to A/N$ die Restklassenabbildung.
Sei $[a] \in im(\varphi) \subseteq H^1(G, A)$, d.h. es existiert ein Kozyklus $b : G \to N$, sodass $\iota \circ b \sim a$.
Da jedoch $ker(\pi) = im(\iota)$, gilt insbesondere

$$\psi([a]) = [\pi \circ a] = [\pi \circ \iota \circ b] = [1],$$

also $[a] \in \psi^{-1}([1])$.
Sei umgekehrt $[a] \in \psi^{-1}([1])$, d.h. $\pi \circ a \sim 1$. Dann gibt es ein Element $\bar{c} = cN \in A/N$ mit $\pi(a_\sigma) = \bar{c}^{-1}\sigma(\bar{c})$ für alle $\sigma \in G$. Indem wir a durch den kohomologen Kozyklus $(ca_\sigma\sigma(c^{-1}))_\sigma$ ersetzen, können wir $a_\sigma \in ker(\pi) = N$ für alle $\sigma \in G$ annehmen. Definieren wir also $[b] \in H^1(G, N)$ vermöge $b_\sigma := a_\sigma \in N$ für alle $\sigma \in G$, so gilt

$$[a] = [\iota \circ b] = \varphi([b]) \in im(\varphi).$$

□

Lemma 3.2. *Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Die Menge $L^\times \times L$ ist eine G-Gruppe bezüglich der Verknüpfung*

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + d)$$

und der G-Operation

$$G \to Aut(L^\times \times L), \sigma \mapsto ((a, b) \mapsto (\sigma(a), \sigma(b))).$$

Die Gruppe $(L^\times \times L, *)$ ist ein sogenanntes semidirektes Produkt und wir schreiben dafür $L^\times \ltimes L$.
Fassen wir L über den injektiven Gruppenhomomorphismus $L \to L^\times \ltimes L, b \mapsto (1, b)$ als Untergruppe von $L^\times \ltimes L$ auf, so ist L ein G-invarianter Normalteiler von $L^\times \ltimes L$.

Beweis.
Für $(a,b),(c,d),(e,f) \in L^\times \ltimes L$ gilt:

$$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (ac, bc+d)*(e,f) = (ace,(bc+d)e+f)$$
$$= (ace, bce+(de+f)) = (a,b)*(ce,de+f) = (a,b)*((c,d)*(e,f))$$

Zudem gilt für $(a,b) \in L^\times \ltimes L$

$$(1,0)*(a,b) = (a,b) = (a,b)*(1,0)$$

sowie

$$(a^{-1},-a^{-1}b)*(a,b) = (1,0) = (a,b)*(a^{-1},-a^{-1}b).$$

Insgesamt ist also $L^\times \ltimes L$ eine Gruppe.
Offensichtlich ist zudem die durch $\sigma(a,b) := (\sigma(a),\sigma(b))$ gegebene G-Operation auf $L^\times \ltimes L$ wohldefiniert und macht $L^\times \ltimes L$ zu einer G-Gruppe.
Desweiteren ist $L = ker(\varphi)$ für den Gruppenhomomorphismus $\varphi : L^\ltimes \times L \to L^\times, (a,b) \mapsto a$, und somit eine normale Untergruppe von $L^\times \ltimes L$. Da $\sigma(1) = 1$ für $\sigma \in G$, ist L zudem G-invariant.

□

Lemma 3.3. *Für eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe G ist die Abbildung*

$$L^\times \ltimes L \to Aut_L(\mathbb{A}^1_L), (a,b) \mapsto Spec(\sum_i x_i t^i \mapsto \sum_i x_i(at+b)^i)^{-1}$$

ein Isomorphismus von G-Gruppen.

Beweis.
Wir können stattdessen auch die analoge Aussage für die Abbildung

$$L^\times \ltimes L \to Aut_L(L[t]), ((a,b) \mapsto \sum_i x_i t^i \mapsto \sum_i x_i(at+b)^i)$$

zeigen. Dabei ist $Aut_L(L[t])$ eine G-Gruppe über die G-Operation

$$\sigma(\varphi) = \sigma_{K[t]} \circ \varphi \circ \sigma_{K[t]}^{-1}$$

(vgl. Bemerkung nach Proposition 1.4.2). Offensichtlich ist die Abbildung eine wohldefinierte Injektion.
Zudem gilt für $(a,b),(c,d) \in L^\times \ltimes L$:

$$(t \mapsto at+b) \circ (t \mapsto ct+d) = (t \mapsto c(at+b)+d) = (t \mapsto (ac)t + (bc+d))$$

Somit ist die Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus bezüglich der Verknüpfung auf $Aut_L(L[t])$.

Surjektivität:
Sei $\varphi \in Aut_L(L[t])$. Dann gilt $deg(\varphi(t)) = 1$, da φ bijektiv ist und

$$1 = deg(t) = deg(\varphi(\varphi^{-1}(t))) = deg(\varphi(t)) \cdot deg(\varphi^{-1}(t)).$$

Schreiben wir also $\varphi(t) = at + b$, so ist φ das Bild von (a, b) unter der gegebenen Abbildung.

G-Verträglichkeit:
Ist $\sigma \in G$ und $\varphi \in Aut_L(L[t])$ das Bild von $(a, b) \in L^\times \ltimes L$ unter dem gegebenen Morphismus, so gilt:

$$\sigma(\varphi)(t) = (\sigma_{K[t]} \circ \varphi \circ \sigma_{K[t]})(t) = (\sigma_{K[t]} \circ \varphi)(t) = \sigma_{K[t]}(at + b) = \sigma(a)t + \sigma(b)$$

Also ist $\sigma(\varphi)$ das Bild von $\sigma(a, b) \in L^\times \ltimes L$ unter dem Morphismus.

□

Bemerkung. Im Fall $n = 2$ ist die Automorphismengruppe der affinen Geraden isomorph zum sogenannten amalgamierten Produkt der Untergruppen A der linearen Transformationen und B der sogenannten Jonquière-Transformationen nach ihrem Schnitt $A \cap B$ (ein Beweis hierzu wurde zum ersten Mal im Jahre 1975 von T. Kambayashi in seinem Artikel (Kam75) veröffentlicht). Diese Konstruktion lässt sich jedoch nicht auf höherdimensionale Fälle übertragen und im Fall $n \geqslant 3$ ist die Bestimmung der Automorphismengruppe bisher noch ein ungelöstes Problem (vgl. (Kra95)).

Mithilfe dieser Isomorphie lässt sich nun die Menge $F^X_{L|K}$ für den Fall $X = \mathbb{A}^1_K$ bestimmen:

Satz 3.4. *Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung. Dann gilt für $X = \mathbb{A}^1_K$:*

$$F^X_{L|K} = \{[\mathbb{A}^1_K]\}$$

Mit anderen Worten: Die affine Gerade $\mathbb{A}^1_K$ besitzt keine nichttrivialen L-Formen.

Beweis.
Wir betrachten also für $X = \mathbb{A}^1_K$ die punktierte Menge

$$F^X_{L|K} \cong H^1(G, Aut_L(X_L)) \cong H^1(G, L^\times \ltimes L)$$

(nach Theorem 1.4.5 und Lemma 3.3).
Nun gilt jedoch

$$H^1(G, L) = 1$$

(nach (Ser79), X.1.1) sowie

$$H^1(G, (L^\times \ltimes L)/L) \cong H^1(G, L^\times) = 1$$

(nach (Ser79), X.1.2, oder Lemma 2.4.5 mit $n = 1$).
Nach Lemma 3.2 ist L ein G-invarianter Normalteiler von $L^\times \ltimes L$ und somit folgt mit Proposition 3.1, dass $H^1(G, L^\times \ltimes L) = 1$, weshalb $F^X_{L|K} = \{[\mathbb{A}^1_K]\}$.

□

Bemerkung und Beispiel. Diese Aussage lässt sich auch für allgemeine separable, algebraische Körpererweiterungen $L|K$ beweisen (vgl. (Kam75)). Auf die Voraussetzung, dass $L|K$ eine separable Körpererweiterung ist, kann jedoch nicht verzichtet werden. Ist K nicht perfekt, so besitzt $\mathbb{A}^1_K$ im Allgemeinen auch nichttriviale Formen mit nichtseparablem Zerfällungskörper:

Betrachte zum Beispiel einen nicht perfekten Körper K der Charakteristik $p > 0$. Dann ist das K-Schema $Y := Spec(K[x,y]/(y^p - x - ax^p))$ mit $a \in K \backslash K^p$ eine nichttriviale Form der affinen Geraden $\mathbb{A}^1_K$ mit nichtseparablem Zerfällungskörper:

* Y und $\mathbb{A}^1_K = Spec(K[t])$ sind nicht isomorph, denn:
  Angenommen, es gilt $Spec(K[x,y]/(y^p - x - ax^p)) = Y \cong \mathbb{A}^1_K = Spec(K[t])$ als K-Schemata. Dann ist insbesondere $K[x,y]/(y^p - x - ax^p) \cong K[t]$ als K-Algebren. Bezeichne mit $\varphi : K[x,y] \to K[x,y]/(y^p - x - ax^p) \xrightarrow{\sim} K[t]$ die Verknüpfung mit der kanonischen Restklassenabbildung. Dann gilt insbesondere $\varphi(y^p - x - ax^p) = 0$. Setze $f(t) := \varphi(x), g(t) := \varphi(y) \in K[t]$. Dann gilt also:
  $$g(t)^p - f(t) - af(t)^p = 0 \Rightarrow g(t)^p = f(t) + af(t)^p$$
  Beachte, dass $f \neq 0$ und $g \neq 0$, da aufgrund der obigen Relation $f = 0 \Leftrightarrow g = 0$ gilt. Im Fall $f = g = 0$ wäre aber $im(\varphi) = K \neq K[t]$.
  Da $p > 1$, folgt somit für den Grad:
  $$p * deg(g) = deg(g^p) = deg(f + af^p) = deg(af^p) = deg(f^p) = p * deg(f)$$
  $$\Rightarrow deg(g) = deg(f) =: n$$
  Benenne nun mit $c_m \in K$ bzw. $d_m \in K$ die Koeffizienten von f bzw. g. Dann gilt durch Koeffizientenvergleich
  $$d_n^p = c_{np} + ac_n^p = ac_n^p \Rightarrow a = (\frac{d_n}{c_n})^p \in K^p,$$
  im Widerspruch zur Voraussetzung.
* Aber für $L := K(\sqrt[p]{a})$ gilt $Y_L \cong \mathbb{A}^1_L$, denn:
  Betrachte den Homomorphismus
  $$\varphi : L[x,y] \to L[x,y], x \mapsto y - \sqrt[p]{a}x, y \mapsto (y - \sqrt[p]{a}x)^p - x,$$
  von L-Algebren. φ ist ein Automorphismus mit Inversem
  $$L[x,y] \to L[x,y], x \mapsto x^p - y, y \mapsto x + \sqrt[p]{a}(x^p - y),$$
  und induziert somit einen Isomorphismus
  $$Y_L = Spec(L[x,y]/((y - \sqrt[p]{a}x)^p - x)) \cong Spec(L[x,y]/(y)) \cong \mathbb{A}^1_L$$
  von L-Schemata.

Die Bestimmung und Klassifizierung von Formen der affinen Gerade über nichtseparablen Zerfällungskörpern ist ein noch weitgehend ungelöstes Problem (für Resultate über rein inseparable Formen vgl. unter anderem (Rus70) oder (KMT74)).

Literatur

[AM69] ATIYAH, Michael F. ; MACDONALD, Ian G.: *Introduction To Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969

[Bru09] BRUSSEL, Eric: *Galois descent and Severi-Brauer varieties.* Website, 2009. – Online erhältlich unter `http://www.mathcs.emory.edu/~brussel/`; abgerufen am 19. August 2018.

[Gro65] GROTHENDIECK, Alexander: *Eléments de géométrie algébrique IV, Seconde partie.* Bd. 24. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1965

[GS16] GALLIER, Jean ; SHATZ, Stephen S.: *Algebraic Geometry.* Website. `http://www.cis.upenn.edu/~jean/algeom/steve01.html`. Version: 2016

[GW10] GÖRTZ, Ulrich ; WEDHORN, Torsten: *Algebraic Geometry I.* Vieweg+Teubner Verlag, 2010

[Har77] HARTSHORNE, Robin: *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1977

[Jah00] JAHNEL, Jörg: The Brauer-Severi Variety associated with a Central Simple Algebra - A Survey. (2000). – Online erhältlich unter `https://www.math.uni-bielefeld.de/LAG/`; abgerufen am 5. September 2018.

[Kam75] KAMBAYASHI, Tatsuji: On the Absence of Nontrivial Separable Forms of the Affine Plane. In: *Journal of Algebra* 35 (1975), S. 449–456

[Ker07] KERSTEN, Ina: *Brauergruppen.* Universitätsverlag Göttingen, 2007

[KMT74] KAMBAYASHI, Tatsuji ; MIYANISHI, Masayoshi ; TAKEUCHI, Mitsuhiro: Unipotent Algebraic Groups. In: *Lecture Notes in Mathematics* 414 (1974)

[Kra95] KRAFT, Hanspeter: Challenging problems on affine n-space. In: *Séminaire Bourbaki* 37 (1995)

[Lam13] LAM, Tsit-Yuen: *A first course in noncommutative rings.* Bd. Vol. 131. Springer Science & Business Media, 2013

[Lan02] LANG, Serge: *Algebra.* Springer Verlag, 2002. – Revised Third Edition

[Nag56] NAGATA, Masayoshi: On the imbedding problem of abstract varieties in projective varieties. In: *Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A: Mathematics* 30 (1956), S. 71–82

[pla18] *Planet Math.* `https://planetmath.org`, 2018

[Rus70] RUSSELL, Peter: Forms of the affine line and its additive group. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 32 (19 70), S. 527–539

[Ser79] SERRE, Jean-Pierre: *Local Fields*. Springer Verlag, 1979

[Sta18] STACKS PROJECT AUTHORS, The: *The Stacks project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2018