

Sudoku und Mathematik

Ulrich Görtz

<http://www.esaga.uni-due.de/ulrich.goertz>

24. September 2010

Sudoku

erfunden 1979 als “number place” von Howard Garns (1905-1989),
ab 1986 erst in Japan, später weltweit populär.

Ähnlich: Eulers (1707-1783) lateinische Quadrate.

<http://www.sudopedia.org/>

			1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6					9
	3							5
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5				7
					6			

Aufgabe: Zahlen einfüllen, so dass in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder 3x3-Box jede Zahl von 1 bis 9 genau einmal auftritt.

Anwendung: Landwirtschaft



Foto aus [Bailey, Cameron, Connelly: Sudoku, gerechte designs, resolutions, Amer. Math. Monthly].

Sudoku und Mathematik?

Independent: no mathematics involved

Mathematische Fragen über Sudoku: Abzählfragen, Komplexität, Strategie.

Mathematisches Argumentieren beim Lösen eines Sudoku-Rätsels: Existenzbeweis, Eindeutigkeitsbeweis.

Abzählfragen

6.670.903.752.021.072.936.960 (ca. 6,7 Trilliarden) verschiedene (vollständig ausgefüllte) Standard-Sudokus (9x9 Felder) [Felgenhauer, Jarvis, 2006].

Symmetrie!

Offen: Wie viele Sudoku-Rätsel gibt es?

Was ist die Mindestanzahl von Vorgaben, so dass die Eindeutigkeit der Lösung garantiert werden kann?

			1				
	6			7	3		4
		8	4			6	3
8			6				9
	3						5
	4				7		2
	7	5			4	1	
3			9	5			7
					6		

•	•		1	•	•	•	•	•
•	6	•	•	7	3	•	•	4
•	•	8	4	•	•	6	3	•
8	•	•	6		•		9	
•	3	•	•	•	•	•	5	•
•	4	•			7		•	2
•	7	5			4	1	•	
3	•	•	9	5	•	•	7	•
•	•	•			6		•	

•	•	3	1	•	•	•	•	•
•	6	•	•	7	3	•	•	4
•	•	8	4	•	•	6	3	•
8	•	•	6		•		9	
•	3	•	•	•	•	•	5	•
•	4	•			7		•	2
•	7	5			4	1	•	
3	•	•	9	5	•	•	7	•
•	•	•			6		•	

Eindeutiges Feld (hidden single)

		3	1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

		3	1				
	6			7	3		4
		8	4			6	3
8			6				9
	3						5
	4				7		2
	7	5			4	1	
3			9	5			7
					6		

	•	3	1				
•	6	•		7	3		4
•	•	8	4			6	3
8			6				9
	3						5
	4				7		2
	7	5			4	1	
3			9	5			7
					6		

4		3	1				
	6			7	3		4
		8	4			6	3
8			6				9
	3						5
	4				7		2
	7	5			4	1	
3			9	5			7
					6		

4		3	1				
	6			7	3		4
		8	4			6	3
8			6				9
	3						5
	4				7		2
	7	5			4	1	
3			9	5			7
					6		4

Eindeutiger Wert (naked single)

			8			
1	3		7	9		
		5	6			
			2			
			4			

4		3	1	6			
	6			7	3		4
7		8	4			6	3
8			6				9
	3						5
	4			7			2
	7	5			4	1	
3	¹²⁸ 4	9	5				7
			7	6			4

1	2	3	4	5	6	?		
2	3	4	5	6	1	?		
						7		

Eindeutiges Paar (naked pair)

1	2	3	4	5	6	89		
2	3	4	5	6	1	89		
						7		

1	2	3	4	5	6	89		
						●		
						●		
2	3	4	5	6	1	89		
						●		
						●		
						●		
						●		
						7		

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	₁₂₈	4	9	5	₁₂₈	₂₈	7	₆₈
			7	6			4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	128	4	9	5	128	28	7	68
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	128	4	9	5	128	28	7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	<u>5</u>			4	1		
3		4	9	<u>5</u>			7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
<u>6</u>	<u>7</u>	<u>5</u>			<u>4</u>	1		
3		<u>4</u>	9	<u>5</u>			<u>7</u>	<u>6</u>
			<u>7</u>		<u>6</u>		<u>4</u>	

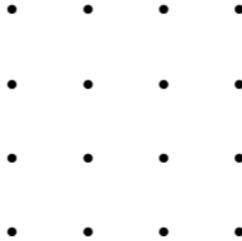
4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
<u>6</u>	<u>7</u>	<u>5</u>			<u>4</u>	1		
3		<u>4</u>	<u>9</u>	<u>5</u>			<u>7</u>	<u>6</u>
			<u>7</u>		<u>6</u>		<u>4</u>	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
<u>6</u>	<u>7</u>	<u>5</u>			<u>4</u>	1		<u>9</u>
3		<u>4</u>	<u>9</u>	<u>5</u>			<u>7</u>	<u>6</u>
			<u>7</u>		<u>6</u>		<u>4</u>	

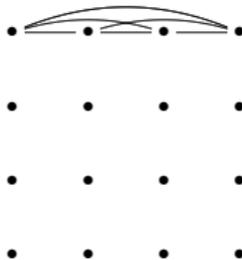
4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		9
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4	5	3	1	6	8	9	2	7
9	6	2	5	7	3	8	1	4
7	1	8	4	9	2	6	3	5
8	2	7	6	3	5	4	9	1
1	3	6	2	4	9	7	5	8
5	4	9	8	1	7	3	6	2
6	7	5	3	2	4	1	8	9
3	8	4	9	5	1	2	7	6
2	9	1	7	8	6	5	4	3

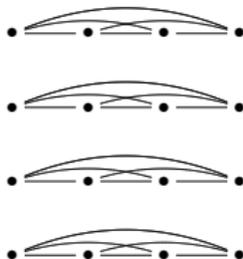
Sudoku als Färbeproblem



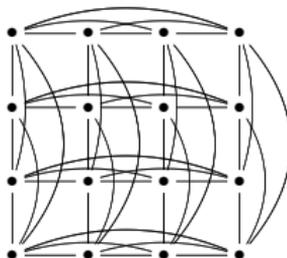
Sudoku als Färbeproblem



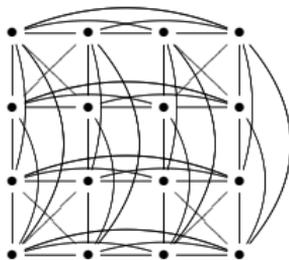
Sudoku als Färbeproblem



Sudoku als Färbeproblem



Sudoku als Färbeproblem



Der 2×2 -Sudokugraph.

Theorem (Vierfarbensatz)

Jede Aufteilung der Ebene in zusammenhängende Gebiete kann mit vier Farben so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Gebiete eine unterschiedliche Farbe haben.

- Viele "falsche" Beweise, zum Beispiel Kempe 1879, Tait 1880.
- Beweis: Appel, Haken 1976 (...), mit Computerhilfe.
- Nach wie vor ist kein Beweis bekannt, der praktikabel "von Hand" nachvollzogen werden kann.
- Erlaubt man *fünf* Farben, so ist der Satz viel einfacher zu beweisen, [Heawood 1890].
- Andererseits: Hadwigers Vermutung (1943), eine weitreichende Verallgemeinerung, ist offen.



Deutschlandkarte von Wikimedia, Stefan-Xp/ug, GFDL/CC BY-SA.

