Sudoku und Mathematik

Ulrich Görtz
http://www.esaga.uni-due.de/ulrich.goertz

24. September 2010

Sudoku

Sudoku

erfunden 1979 als “number place” von Howard Garns (1905-1989),

Sudoku

erfunden 1979 als “number place” von Howard Garns (1905-1989),

ab 1986 erst in Japan, später weltweit populär.

Sudoku

erfunden 1979 als "number place" von Howard Garns (1905-1989),

ab 1986 erst in Japan, später weltweit populär.

Ähnlich: Eulers (1707-1783) lateinische Quadrate.

Sudoku

erfunden 1979 als "number place" von Howard Garns (1905-1989),

ab 1986 erst in Japan, später weltweit populär.

Ähnlich: Eulers (1707-1783) lateinische Quadrate.

http://www.sudopedia.org/

			1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

Aufgabe: Zahlen einfüllen, so dass in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder 3x3-Box jede Zahl von 1 bis 9 genau einmal auftritt.

Anwendung: Landwirtschaft

:

Foto aus [Bailey, Cameron, Connelly: Sudoku, gerechte designs, resolutions, ... Amer. Math. Monthly].

Sudoku und Mathematik?

Sudoku und Mathematik?

Independent: no mathematics involved

Sudoku und Mathematik?

Independent: no mathematics involved

Mathematische Fragen über Sudoku: Abzählfragen, Komplexität, Strategie.

Sudoku und Mathematik?

Independent: no mathematics involved

Mathematische Fragen über Sudoku: Abzählfragen, Komplexität, Strategie.

Mathematisches Argumentieren beim Lösen eines Sudoku-Rätsels:

Sudoku und Mathematik?

Independent: no mathematics involved

Mathematische Fragen über Sudoku: Abzählfragen, Komplexität, Strategie.

Mathematisches Argumentieren beim Lösen eines Sudoku-Rätsels: Existenzbeweis,

Sudoku und Mathematik?

Independent: no mathematics involved

Mathematische Fragen über Sudoku: Abzählfragen, Komplexität, Strategie.

Mathematisches Argumentieren beim Lösen eines Sudoku-Rätsels: Existenzbeweis, Eindeutigkeitsbeweis.

Abzählfragen

6.670.903.752.021.072.936.960 (ca. 6,7 Trilliarden) verschiedene (vollständig ausgefüllte) Standard-Sudokus (9x9 Felder) [Felgenhauer, Jarvis, 2006].

Abzählfragen

6.670.903.752.021.072.936.960 (ca. 6,7 Trilliarden) verschiedene (vollständig ausgefüllte) Standard-Sudokus (9x9 Felder) [Felgenhauer, Jarvis, 2006].

Symmetrie!

Abzählfragen

6.670.903.752.021.072.936.960 (ca. 6,7 Trilliarden) verschiedene (vollständig ausgefüllte) Standard-Sudokus (9x9 Felder) [Felgenhauer, Jarvis, 2006].

Symmetrie!

Offen: Wie viele Sudoku-Rätsel gibt es?

Abzählfragen

6.670.903.752.021.072.936.960 (ca. 6,7 Trilliarden) verschiedene (vollständig ausgefüllte) Standard-Sudokus (9x9 Felder) [Felgenhauer, Jarvis, 2006].

Symmetrie!

Offen: Wie viele Sudoku-Rätsel gibt es?

Was ist die Mindestanzahl von Vorgaben, so dass die Eindeutigkeit der Lösung garantiert werden kann?

			1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

			1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

●	●	3	1	●	●	●	●	●
●	6	●	●	7	3	●	●	4
●	●	8	4	●	●	6	3	●
8	●	●	6		●		9	
●	3	●	●	●	●	●	5	●
●	4	●			7		●	2
●	7	5			4	1	●	
3	●	●	9	5	●	●	7	●
●	●	●			6		●	

Eindeutiges Feld (hidden single)

		3	1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

		3	1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

		3	1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

4		3	1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6			

4		3	1					
	6			7	3			4
		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3			9	5			7	
					6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3		4	9	5			7	
			7		6		4	

				8				
1		3		?		9		
			5		6			
				2				
				4				

Eindeutiger Wert (naked single)

				8				
1		3		7		9		
			5		6			
				2				
				4				

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	128	4	9	5			7	
			7		6		4	

1	2	3	4	5	6	?		
2	3	4	5	6	1	?		
						7		

Eindeutiges Paar (naked pair)

1	2	3	4	5	6	89		
2	3	4	5	6	1	89		
						7		

1	2	3	4	5	6	89		
2	3	4	5	6	1	89		
						7		

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	128	4	9	5	128	28	7	68
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	128	4	9	5	128	28	7	68
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
	7	5			4	1		
3	128	4	9	5	128	28	7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\underline{5}$			$\overline{4}$	1		
3		$\overline{4}$	9	$\underline{5}$			$\overline{7}$	$\overline{6}$
			$\overline{7}$		$\overline{6}$		$\overline{4}$	

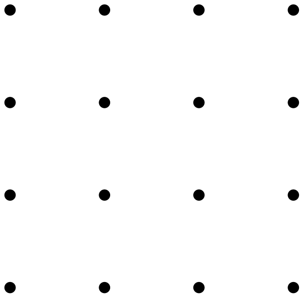
4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\underline{5}$			$\overline{4}$	1		
3		$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\underline{5}$			$\overline{7}$	$\overline{6}$
			$\overline{7}$		$\overline{6}$		$\overline{4}$	

4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\underline{5}$			$\overline{4}$	1		9
3		$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\underline{5}$			$\overline{7}$	$\overline{6}$
			$\overline{7}$		$\overline{6}$		$\overline{4}$	

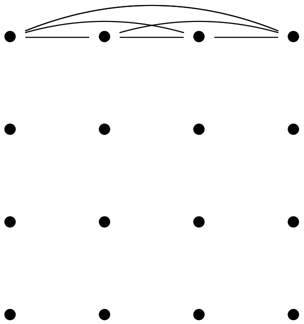
4		3	1	6				
	6			7	3			4
7		8	4			6	3	
8			6				9	
	3						5	
	4				7			2
6	7	5			4	1		9
3		4	9	5			7	6
			7		6		4	

4	5	3	1	6	8	9	2	7
9	6	2	5	7	3	8	1	4
7	1	8	4	9	2	6	3	5
8	2	7	6	3	5	4	9	1
1	3	6	2	4	9	7	5	8
5	4	9	8	1	7	3	6	2
6	7	5	3	2	4	1	8	9
3	8	4	9	5	1	2	7	6
2	9	1	7	8	6	5	4	3

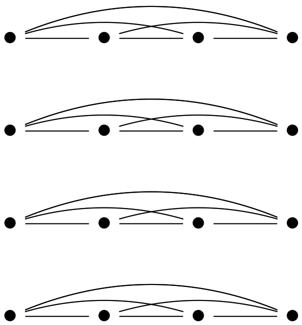
Sudoku als Färbeproblem



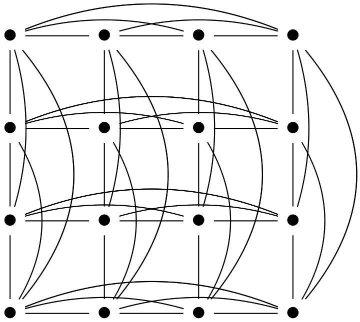
Sudoku als Färbeproblem



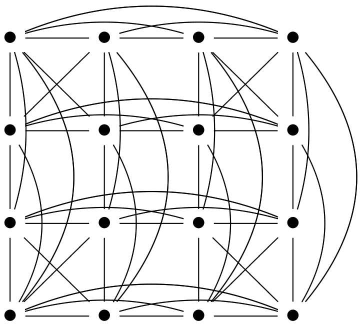
Sudoku als Färbeproblem



Sudoku als Färbeproblem



Sudoku als Färbeproblem



Der 2×2-Sudokugraph.

Theorem (Vierfarbensatz)

Jede Aufteilung der Ebene in zusammenhängende Gebiete kann mit vier Farben so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Gebiete eine unterschiedliche Farbe haben.

Theorem (Vierfarbensatz)

Jede Aufteilung der Ebene in zusammenhängende Gebiete kann mit vier Farben so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Gebiete eine unterschiedliche Farbe haben.

- Viele "falsche" Beweise, zum Beispiel Kempe 1879, Tait 1880.

Theorem (Vierfarbensatz)

Jede Aufteilung der Ebene in zusammenhängende Gebiete kann mit vier Farben so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Gebiete eine unterschiedliche Farbe haben.

- Viele "falsche" Beweise, zum Beispiel Kempe 1879, Tait 1880.
- Beweis: Appel, Haken 1976 (...), mit Computerhilfe.
- Nach wie vor ist kein Beweis bekannt, der praktikabel "von Hand" nachvollzogen werden kann.

Theorem (Vierfarbensatz)

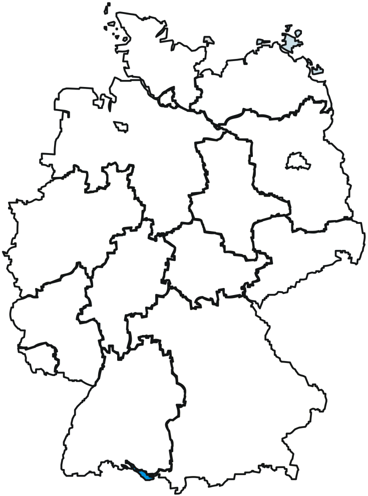
Jede Aufteilung der Ebene in zusammenhängende Gebiete kann mit vier Farben so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Gebiete eine unterschiedliche Farbe haben.

- Viele “falsche” Beweise, zum Beispiel Kempe 1879, Tait 1880.
- Beweis: Appel, Haken 1976 (. . .), mit Computerhilfe.
- Nach wie vor ist kein Beweis bekannt, der praktikabel “von Hand” nachvollzogen werden kann.
- Erlaubt man *fünf* Farben, so ist der Satz viel einfacher zu beweisen, [Heawood 1890].

Theorem (Vierfarbensatz)

Jede Aufteilung der Ebene in zusammenhängende Gebiete kann mit vier Farben so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Gebiete eine unterschiedliche Farbe haben.

- Viele "falsche" Beweise, zum Beispiel Kempe 1879, Tait 1880.
- Beweis: Appel, Haken 1976 (. . .), mit Computerhilfe.
- Nach wie vor ist kein Beweis bekannt, der praktikabel "von Hand" nachvollzogen werden kann.
- Erlaubt man *fünf* Farben, so ist der Satz viel einfacher zu beweisen, [Heawood 1890].
- Andererseits: Hadwigers Vermutung (1943), eine weitreichende Verallgemeinerung, ist offen.



Deutschlandkarte von Wikimedia, Stefan-Xp/ug, GFDL/CC BY-SA.